Keep Your Card in this Pocket

WAS JESUS AN HISTORICAL PERSON?

BY

ELWOOD WORCESTER, D.D.

NEW YORK
OXFORD UNIVERSITY PRESS
AMERICAN BRANCH: 35 WEST 32ND STREET
LONDON · TORONTO · MELBOURNE & BOMBAY
1926

PRINTED IN THE UNITED STATES OF AMERICA

FOREWORD

THE SUBSTANCE of this little volume was presented in the form of two discourses in Emmanuel Church, Boston, on Sunday mornings in January, 1926, at a time when the question under consideration was receiving a good deal of attention from periodicals and from the daily press. In offering my work to the public I have preserved the direct form of address and have made no change in my statements beyond fortifying them by a few notes and the addition of several paragraphs in regard to Josephus, rendered necessary by the discovery of new material of which I

was not aware when I preached my sermons.

These addresses presuppose some acquaintance on the part of the writer with the works of the so-called "Mythologists," particularly with the writings of Jensen, William Benjamin Smith, Edward Carpenter, Arthur Drews, Kalthoff and others, whose titles in this brief, informal presentation, I need not mention. In preparing it I have availed myself of the studies of von Soden, Schweitzer, Johannes Weiss and of the encyclopedias and dictionaries. My first inventory, "Witness of Enemies," I judge to be quite complete as regards authentic and sufficiently early documentary evidence. My second inventory, "Witness of Friends," is, of course, utterly incomplete. Within the narrow limits of a Sunday morning address I could but select two witnesses out of many, nor do much justice to them.

I have no doubt that my carefulness in dealing with the Bible themes will be offset in the opinion of the educated by my fanaticism in believing in the reality of most of the miracles ascribed to Jesus. On this subject, however, I have sources of information which most literary critics do not possess, and I am content to await the verdict of the next two or three generations of scholars.

Although, personally, I regard the denial of Jesus' existence as a mere aberration of criticism and a curiosity of literature, I have treated the subject, within the limits imposed on me, with the utmost seriousness. It would be too much to expect that this or any other truthful statement in regard to the reality of the Lord's existence will prevent this great fact of history from being questioned again. Yet I venture to think that this modest array of witnesses, mostly dating from the first century, will make the denial of these facts

more difficult to men whose education permits them to judge of the nature and value of historical evidence.

ELWOOD WORCESTER

RECTORY OF EMMANUEL CHURCH,
BOSTON, MAY, 1926.

WAS JESUS AN HISTORICAL PERSON?

I. THE WITNESS OF ENEMIES

I INTEND TO SPEAK today for the first time in my life of our reasons for believing in Jesus as an historical person. This is a fact which we usually take for granted and which we have a right to take for granted. During the past few months, however, a Bishop of our Church (Bishop Brown) was deposed by the General Convention chiefly for the expression of his doubt that Jesus ever existed as an historical person. More recently one of the most eminent Rabbis of American Judaism (Dr. Wise) has been roundly berated by his

fellow Rabbis, and has been threatened with punishment for venturing to say in a sermon that he no longer regards Jesus as a mythical person, as he had been taught to do, but as an historical character whose moral teachings ought to be followed by Jews as well as by Christians. From the outcry that followed, one would suppose that Dr. Wise had betrayed a sacred duty and had wronged all Israel.

I have a profound respect for the feelings and the good qualities of the Jews, but when it comes to their challenge of the existence of Jesus Christ, they cannot wonder if Christians also are interested in their surmises.

From what source did they and Bishop Brown and others derive this singular and highly objectionable idea? From four or five books written by an American, an Englishman, two Germans, and a Frenchman, who are all mythologists, whose pleasant fancies

ought not to be applied to the persons and facts of history. I shall not try to make you well acquainted with these works. They would only irritate you. They all develop the same theme — namely, that the being we know as Jesus Christ never existed on earth in a human form nor led a human life; but that He is an ideal figure, according to some the creation of the spiritual longings and aspirations of His times, according to others a new embodiment of an old nature-myth in which a divine hero suffers and is slain and rises again. The American mathematician, William Benjamin Smith, believes that a long series of such persons were worshipped in the East from time to time, and that they all were called Jesus. Of course, he offers no evidence for this fancy.

Kalthoff conceives that the whole character and life of Jesus were created by the Church. This conception rests

on a certain view of history, namely, that great and sweeping moral and social changes do not proceed from individuals, but from masses of men — a view I believe to be the very reverse of the truth. It is easy to say the Church created Christ. It is less easy to answer the question who or what then created the Church? And if the Church were able to create the marvelous figure we encounter in the Gospels, why, having brought forth the Gospels, did she lose her creative power, so that in her whole vast literature there is no other writing which remotely resembles them?

If this were true, we should expect the most ideal and the least human portraiture of Jesus to come first and the more human qualities to be added artistically afterward. On the contrary, it is our bold, human, harsh, realistic Gospel of Mark which comes first, and the most ideal and philosophic Gospel of John which comes last.

Neither of these attempts sets forth the myth-making power of mankind on a grand scale. This was reserved for a real Mythologist, the great Babylonian scholar, Jensen, who takes the old Babylonian Nature-Myth of the adventures of Gilgamesh and Eabani and the goddess Ishtar — thinly veiled personifications of the Sun, the Moon, and the planet Venus, and tries to find counterparts to their exploits in the life of the Lord.

Mythologists are well known to be incorrigible in the application of their theories. They have no sense of reality. They live in a world of imagination. Give them a name which dimly reminds them of some other name, an event like climbing a mountain, or going to sea, or seeing the sun rise, or suffering, or doing hard labor, which most men experience at some time of their lives, and, with the help of parallel columns, they will find the most marvelous resemblances

between the most remote persons and things. By their arts almost any man who ever lived could be proved a symbol, an idea, a myth.

Without consulting Archbishop Whateley, I think I could construct a better argument than Jensen's to prove that Napoleon Bonaparte never lived. Using the philological methods of the Mythologists, it is easy to see that the name Napoleon is only a modification of Apollo. It is true, it begins and ends with an n and contains an inconvenient e, but that ought not to disturb strong minds. So he may be regarded as an incarnation of Apollo, the Sun god. Having been born on the Island of Corsica, he rose, like the Sun, out of the Sea, and, having run his course, his sun set on the opposite side of the heavens, on another island, St. Helena. Napoleon had seven brothers and sisters who revolved about him — derived all their light and sustenance from him — the

seven planets. Napoleon had twelve Marshals, corresponding doubtless to the twelve months of the year, etc., etc.

By such arts we can prove anything, and I am surprised that our Hebrew brethren should surrender their reputation for sanity and sagacity by committing themselves to such aberrations. All honor to Rabbi Wise if he has seen the light.

Now, without further prelude, let us pass to our subject and ask what historical evidence we have for our Lord Jesus' existence and place in history. In making this inventory I must ask your indulgence. I do not wish to make this an unduly long sermon, and I shall, therefore, consider today only the witness of those who were not Christians and leave to another occasion the witness of our Scriptures and the words and deeds of Christ. I cannot pretend to be able to exhaust this subject. I have prepared this statement as I could find the

St. Paul, in the Church, in the creation of a new world out of nothing.

One man indeed we might look to for a clear, unshakable statement in regard to Jesus, especially as he has given us a splendid and perfectly authentic picture of John the Baptist. I mean, of course, the Jewish historian Josephus, who was born only about thirty-seven years after Jesus and who wrote freely of His times. Probably Josephus did write something in regard to Jesus, but some later Christian scholar, not satisfied with what Josephus had written about his Lord, and thinking to honor Jesus by a forgery, modified Josephus' statement and substituted words of his own, which Josephus could not have written, unless he himself had been a Christian, not a Pharisee.

The famous passage occurs in the 18th Book of Josephus' Antiquities, the 3rd Chapter, the 3rd Section.

The words are these: "At this time

lived Jesus, a man full of wisdom, if one may call him a man. He performed unbelievable deeds, and was the teacher of those men who are willing to accept the truth. He drew to himself many Jews and many of the heathen world. He was the Christ. Through the accusation of our leaders, Pilate condemned him to the death of the cross. Yet those who had loved him even now were not unfaithful. On the third day he appeared to them again alive, as divinely-sent prophets had foretold, along with thousands of other wonderful things. To this day the people called Christians, who derive their name from him, have not ceased."

It is generally admitted by scholars that this passage, as it has come down to us in all Greek manuscripts, cannot be from the pen of Josephus. On the other hand, it is hard to believe that the historian who wrote freely of John the Baptist and who displays so lively a cu-

riosity in regard to the least matters of his age, should have written nothing in regard to Jesus and of the movement inaugurated by Jesus which, at the time he wrote (93–94 A.D.), had divided his nation. Critical scholars who wish to strike out this passage *in toto* as a Christian forgery explain this silence by Josephus' unwillingness to give offence to the Romans through any allusions to Messianic claims among the Jews which might appear to threaten the sovereignity of Rome. This, however, is merely an hypothesis and it would appear to be fairer to deal with the passage as it stands. One difficulty, which has always been felt, we may now be in a position to remove.

The famous passage occurs in the chapter in which Josephus describes Pilate's acts in crushing insurrections among the Jews. After relating Pilate's attempt to introduce busts of the Emperor into Jerusalem, which met with

bitter opposition, and his forcible appropriation of temple funds to pay for the aqueduct he had built, the passage in regard to Jesus follows, which appears to break the thread of Josephus' narrative, as no tumult or popular uprising occurs in the Greek text, nor does any description of the crucifixion follow. It would appear then either that this passage is a complete forgery, clumsily introduced by a Christian hand in a place where it does not belong, or else that Josephus introduced his allusion to Jesus in this place because he wished to describe and did describe an insurrection among the people which occurred at this time in connection with Jesus.

The plain and emphatic statement of our Gospels in regard to the trilingual inscription affixed to the cross, in Hebrew, Greek and Latin, may be regarded as proof that Jesus was executed as a public offender, an insurgent against the power of Rome. Both St. Mark

and St. Luke allude pointedly to Barabbas "which lay bound with them that had made insurrection with him, who had committed murder with him in the insurrection." Although the exact date of this uprising is not specified, it must have occurred shortly before, as the execution of such conspirators would not long be delayed, and the fact that Barabbas was proposed for liberation as a substitute for Jesus might indicate that to the popular mind they were associated in the same uprising. If so, the forcible "cleansing" of the temple, the scourge of small cords, the overthrowing of the tables of the money-changers, which have always presented difficulties, both moral and physical, would fall into place, and the question, "Is it lawful to render tribute unto Caesar or no?" would gain new point and relevancy. We have also to recall the strange, enigmatic words of Jesus, reported by St. Luke, whose application

we have never understood. "He that hath no sword, let him sell his garment and buy one." It would seem then that half concealed in our Gospels is the memory of a more tumultuous entrance into Jerusalem than we have been accustomed to recognize. Perhaps Josephus did know of some insurrection connected with the death of Jesus which caused him to write of the Lord in this chapter of his book.

In this connection the article of Dr. F. Lehmann-Haupt, the well-known archaeologist of the University of Innsbruck, "New Testimony in regard to Jesus," is of peculiar interest. In this paper [1] Dr. Lehmann-Haupt calls attention to a recently discovered "North-Slavic" manuscript of Josephus' Jewish Wars which gives a full account of Jesus' appearance in Jerusalem and the tumult which attended it. Although this passage contains unmistakable reminiscences of the famous passage of the

Antiquities, as well as other Christian interpolations, it also presents new and hitherto unknown material in the style and manner of Josephus and containing just such facts and incidents as we should expect of the Jewish historian in describing Jesus' fate. Lehmann-Haupt feels justified in affirming, "We may rest assured that we are dealing here with a genuine record derived from Josephus and presumably with the original passage from which a later Christian reviser has eliminated the very points that justified its inclusion in the part of Josephus' work where it appeared — that is, among the accounts of insurrections, as the episodes it described would appear to be in the eyes of the Jewish high priests and of the Romans."

We know from Josephus' own pen that he wrote some of his works, at least, originally in his native Aramaic, but that, wishing to give them wider cur-

rency, he afterward translated them into Greek for the people of the Roman Empire and the Jews of the diaspora. The peculiarity of this Russian version of the wars, as Lehmann-Haupt points out, is that it departs so widely from the Greek text of Josephus that it cannot possibly be derived from it, and it is probably a direct translation of Josephus' original Aramaic. The passage is as follows: "At that time a man appeared, if he can be called a man. His nature and his body were human, but his appearance was more than human. He performed miracles through some invisible power. Some said of him that he was our first Lawgiver (Moses), risen from the dead and making himself known by many healings and magic works; others thought that he was sent by God. I personally, in view of his whole life, should not call him a messenger of God. For he opposed many things in the Law and did not observe

the Sabbath according to ancestral custom. Yet, on the other hand, he did nothing unworthy or criminal, but only through his words did he accomplish what he did. And many of the people followed him and accepted his doctrine; and many souls wavered, thinking that through him the Jewish people would be liberated from the Roman yoke. It was his custom to tarry on the Mount of Olives near the city, and it was there that he healed people, and there he gathered to him one hundred and fifty slaves and a great multitude of the lower classes. When they saw his power and that he could do what he willed by the magic of his word, they demanded that he proceed into the city and destroy the Roman soldiers and Pontius Pilate who ruled over us. . . . And when the leaders of the Jews learned of this, the high priests gathered together and said: 'We are powerless and weak and cannot defy the Romans;

but inasmuch as the bow is drawn against us we shall go and tell Pilate what we have heard. Then we shall be free from blame. For if Pilate should hear of this from others, our property may be taken from us and we as well as this other man may be slaughtered, and the Children of Israel will be dispersed to the ends of the earth.' And they went forth and reported this to Pilate, and the latter took prompt measures and ordered that many of the multitude be slain but that their miracle-worker be brought to him. And after Pilate had heard the case against him, the Romans took him and crucified him according to ancestral custom."

Several of these expressions are very striking. The designation of the "servants of Christ" as "slaves" would be a very natural mistake on the part of Josephus. St. Paul gloried in calling himself "the slave" of Jesus Christ. The allusion to the Mount of Olives

where the arrest of Jesus actually took place would be likely to be remembered and emphasized by one whose knowledge of Jesus was confined to the last week in Jerusalem. The statement that "some said of him that he was our first Lawgiver Moses, risen from the dead and making himself known by many healings and magical works" is strangely reminiscent of the reply of the disciples to Jesus' question — "Whom do men say that I am?" (St. Mark 9–27). Yet the introduction of the name of Moses, which never occurs in this connection in the Gospels, makes it improbable that this passage of Josephus is taken from our Scriptures.

All this presents Josephus' testimony to the existence and fate of Jesus in a different light. If further investigation corroborates the conclusions of Lehmann-Haupt, there would seem to be no question that Josephus, as we should expect, did allude to Jesus and gave a

detailed account of his last week in Jerusalem at the precise place in his work where such an account would naturally fall, namely, among the acts of Pilate in suppressing insurrections. From its obvious similarities with the famous passage of the Antiquities it is plain that the detailed statement we have quoted, though now found in the Russian translation of the Wars, is in some ways associated with this passage. In any case we may be sure that Josephus would have written more freely of such matters as the "Insurrection of Jesus," to his own people in Aramaic than he would have written in Greek for the Roman world to read.

In his comment on the value of this new evidence, Lehmann-Haupt remarks: "Many will regard these comparatively recent discoveries as important primarily for the evidence they contain that Jesus was an historical character. From the scholar's point of

view that is secondary. The historical character of Jesus needs no additional proof. We have both adequate New Testament and lay authority for his existence." Whether this passage ever stood in the Greek version of Josephus' works, and if so, by whom it was deleted, whether by a Jew who wished to suppress every allusion to the Lord, or by a Christian who found it objectionable and who substituted for it expressions Josephus could not have used unless he himself were a Christian, we have no means of knowing. We are able, however, to determine with some definiteness when the Christian rewriting of the famous passage of the Antiquities took place. Origen, writing in the first half of the third century, definitely states that Josephus did not admit that Jesus was the Messiah. (Contra Celsum 1.47 and Comment. in Matth. X. 17, quoted by Klausner). Eusebius, the Church historian, who

lived in the fourth century, quotes the passage as it has come down to us, (e.g. Eccles. Hist. Bk. I. ch. 11.) Between Origen and Eusebius the falsification took place. No Christian writer, so far as I am aware, quotes the newly discovered passage of the Slavic manuscript. As the Jews of Palestine detested Josephus for his apostasy to the Romans they appear to have made little use of his Aramaic writings. It is therefore not surprising that this highly important passage should have remained concealed so long. As Dr. Vacher Burch states in his valuable article: "There were Slav monks in Syria in the very early days of the Church and they were familiar with the Aramaic language. Their translation was direct from the original and unaffected by Græco-Roman influence."[2]

Important also is the critical estimate of the testimony of Josephus to Jesus made by the learned, cautious

and eminently fair-minded Jewish scholar, Dr. Joseph Klausner in his "Jesus of Nazareth."[3] This is the first work on the life of the Lord written in a Semitic idiom and of a quality to command the attention of European and American scholars, since New Testament times. In his careful presentation of the Jewish background of the life of the Lord, Klausner by no means regards the whole passage of Josephus as a forgery. Although, at the time of his writing, Klausner was unacquainted with the Slavic manuscript to which reference has been made, he considers it highly improbable that Josephus should have failed to comment on events so important as the appearance of Jesus and the rise of Christianity. Naturally Klausner does not accept those parts of Josephus' text which almost all Christian scholars reject. Omitting these, the passage which may be ascribed to Josephus runs as follows:

"Now there was at this time (i.e. about the time of the rising against Pilate, who wanted to extract money from the temple for the purpose of bringing water to Jerusalem from a distant spring), Jesus, a wise man, for he was a doer of wonderful works and a teacher of such men as receive the truth with pleasure. He drew to him both many of the Jews and many of the Gentiles, and when Pilate, at the suggestion of the principal men among us, had condemned him to the cross, those who loved him first ceased not (to do so) and the race of Christians, so named from him, are not extinct even now."

This part of the passage Klausner considers genuine and characteristically in Josephus' style. The miracles of Jesus would be no stumbling stone to him for he takes pleasure in telling miraculous stories of his own. There were many Gentiles in the Church when Josephus wrote and he conceives that it

was so from the beginning. There is nothing in this passage which might not be written by a Pharisee, but there are several expressions not likely to be voiced by a Christian. A Christian writer would not be likely to describe his Lord as "a wise man." In fact the interpolation "if it be lawful to call him a man" shows how the words grated on the Christian ear. As Josephus describes John the Baptist as "a good man," and a kind of philosopher, suppressing all allusions to his witness to Jesus as Messiah, so he calls Jesus "a wise man, a teacher of such as receive the truth with pleasure." In brief it appears to be highly probable, if not certain, that Josephus bore witness to Jesus, and, remembering that he was not a Christian and that he wrote with a desire not to offend the Romans, we have no reason to expect more from him than we now possess.

There is another brief passage, in the

Antiquities, which is open to no such objection as the first, in which Josephus casually alludes to the Lord, cites Jesus by name as an historical person and gives an account of the death of the Apostle James.

"He (the Chief Priest Ananus or Annas) called the Council together for judgment and brought before them the brother of Jesus who was called the Christ, James by name, along with several others, and condemned them to be stoned."

This evidence is the more valuable because of its casual character and because it contains nothing which Josephus might not have written. Here Josephus, far from regarding Jesus as a mythical person, speaks plainly of His family relations.

This is the James whom Paul, in Galatians, calls a pillar of the Church, and to whom, in I Corinthians, he says Jesus appeared after His resurrec-

tion. His death occurred A.D. 63, and is fully described by the old Church writer, Hegesippus. This passage Klausner regards as entirely genuine, nor has any good argument ever been adduced against it. Though Origen in his commentary on St. Matthew (Bk. X. 17) ascribes words to Josephus in regard to James which are not found there, yet it is plain that Origen is quoting from Hegesippus, not from Josephus, the name "Hegesippus," as Klausner points out, in Hebrew is written "Joseph."

We have, also, another independent Jewish witness to the existence of Jesus, of which I should like to remind our Jewish friends, in that strange conglomeration of Jewish wisdom and folly known as the Talmud, which Renan calls "a bad book." The earliest parts of the Talmud are believed to date from the first Christian centuries, and in them the name of Jesus is mentioned

not infrequently. Laible, in his great work, "Jesus Christ in the Talmud,"[4] has brought to light forty-one such passages. Most of these allusions are, of course, derogatory. They exhibit both ignorance and malice, but no doubt is ever expressed in the Talmud as to the fact of Jesus' human existence. His mother and His birth are frequently alluded to, in objectionable terms. Joseph and Mary Magdalene and the Lord's disciples are mentioned again and again. His miracles are discussed and not denied, though they are ascribed to magic. His death is recounted and also His claim to be the Son of God. The earliest of these references appear to date from a time when Christianity and Judaism were not entirely separated, as, in the later portions of the Talmud, when Jesus' name is mentioned, the malediction follows: "May his name and his memory be blotted out." One does not feel such hatred for a myth.

As a proof of the early date of these Jewish aspersions, I may cite the fact that in Justin Martyr's celebrated "Dialogue with Trypho the Jew" (about 160 A.D. and in Celsus' still more famous "True Word" written at about the same time, a Jew is introduced who utters many of the same calumnies which we find in the Talmud, and in the "Toledoth Jeshua." In neither of these works is there the slightest suspicion that Jesus was not an historical person.

As the learned Jewish scholar, Dr. Samuel Krauss, says, "The references to Jesus in the Talmud are older than the Talmud."[5] Klausner also regards the aspersions which Celsus learned from the Jews and which afterward reappeared in the Talmud, as proof of the very early date of the Talmud's allusions to Jesus. He remarks: "It therefore follows that the accounts of the first three Gospels are fairly early and

that it is unreasonable to question either the existence of Jesus (as certain scholars have done both in the eighteenth century and in our own time) or his general character as it is depicted in these Gospels. This is the single historical value which we can attribute to the early Talmudical accounts of Jesus." (p. 20.)

I shall conclude this study by citing the few, brief passages in classical Roman writers of the first century, in which the name of Jesus is mentioned.

In the year 64, about thirty years after Jesus' death, the Emperor Nero is believed to have taken it into his head to set fire to Rome. The people were deeply incensed, and Nero began to look around to see if there were not other persons in Rome more hated than he was. He thought of the innocent Christians, and, collecting all of them he could find, possibly St. Paul among the number, he put them to death with

hideous tortures for the amusement of the people.

Commenting on this vile act, the great Roman historian, Tacitus, remarks in his Annals, written at the beginning of the second century (XV. 44), "In order to suppress this superstition, Nero exposed and visited with the most exquisite punishments those whom the people call Christians who, on account of their misdeeds, were hated. The founder of this name is Christ, who, in the reign of Tiberius, was put to death by the Procurator Pontius Pilate. This corrupting superstition, suppressed for a moment, broke out again, not merely in Judea, the home of the evil; but also in Rome whither all horrible and shameful things flow together from all parts of the world and find acceptance."

Certainly no Christian wrote these words, nor apparently, did Tacitus get this information from Christians, but

from Roman sources. No one has been able to invalidate this highly characteristic passage. These words bear witness to the name of Christ (if not of Jesus) as the founder of Christianity, to the time and place of His death, and to the fact that Jesus suffered under Pontius Pilate in the reign of Tiberius. Tacitus also informs us that at this time, only about thirty years after Jesus' death, great numbers of His followers were to be found in Rome.

Suetonius, a younger contemporary of Tacitus, in his famous Lives of the Caesars, in describing the reign of the Emperor Claudius (A.D. 41–54), says: "Claudius expelled the Jews from Rome because, at the instigation of one Chrestus, incessant tumults occurred." Chrestus is not a Jewish name and no such person is known. Most probably Chrestus is a misspelling of Christus. The incessant tumults he alludes to are probably the attacks of Jews on their

fellow countrymen in Rome who acknowledged Christ.

This statement is supported by the Acts of the Apostles (XVIII, 2), which informs us of the meeting of Paul with Aquila and Priscilla, in Corinth, who had left Italy "because Claudius had commanded all the Jews to depart from Rome." This expulsion could not have occurred later than 52 A.D. (Schürer). If, with the majority of Christian scholars, we identify Chrestus with Christus, we have here definite proof that within twenty years after the death of Jesus, many Jews in Rome believed not merely in His existence, but in His Messiahship.

Even if Chrestus is only a Christian disciple, the passage from Suetonius proves that at this time the agitation of the Messiahship of Jesus had assumed such proportions in Rome that Claudius felt it necessary to banish all Jews from the city because of it. From

either point of view this passage is of great importance.

In his Life of Nero, Suetonius alludes to Christians again as a race of men addicted to "a new and vile superstition."

In the year 103, Pliny the Younger, a younger contemporary of Tacitus and one of the most lovable of men, had been sent by the Emperor Trajan to be Governor of Pontus and Bithynia, in Asia Minor. There he found himself confronted with the difficult problem of what to do with the Christians who refused to offer sacrifice and to pay the usual divine honors to the Emperor.

Among his delightful letters, the most interesting is one in which he asks his royal master for instructions on this subject. In the course of this letter he says that when he had summoned certain men and women, accused of the crime of being Christians, "they affirmed that their whole guilt and er-

ror lay in the fact that on a stated day they assembled before dawn and addressed a prayer to Christ as to a divinity, binding themselves with a solemn oath, not for the purpose of any wicked design, but that they should never commit any fraud, theft, or adultery, nor to falsify their word, nor to deny a pledge when called upon to deliver it up. After which it was their custom to separate and then to reassemble, to eat a common harmless meal."

This is probably the first time that a Roman of good birth and breeding thought it worth while to inquire into the crime of being a Christian, and this is what he found. I am sorry to add that Pliny, wishing to satisfy his curiosity further, put two young Christian slave girls to the torture. From them he learned nothing but their heroic faith.

Such, as far as my knowledge extends, (and I imagine you wish it had

not extended so far) is the whole evidence of Christ's century, outside our canonical New Testament and the writings of early Christians, of the human existence of Jesus — Josephus, the Talmud, Tacitus, Suetonius, Pliny. If there are other witnesses, I should be glad to be reminded of them. They are few and their witness brief and scanty — yet when we remember the obscurity and the brevity of Jesus' earthly life, we have no reason to wonder that the evidence is not more copious. Of course these scanty references are not our reasons for believing that Jesus lived. Proof for this He Himself rendered in words that could not be counterfeited, in deeds that changed the course of history and the meaning of life. Yet these literal allusions to Christ and His people, taken wholly from the lips of contemporary enemies and indifferent persons, are sufficient to prove that he lived a human life and died on the cross under Pontius

Pilate. At this date the question of the existence of the greatest Person in history, ought not to be raised. We can regard the vagaries of mythologists with indulgence. They can convince no one who does not wish to be convinced, but we should expect more common sense on the part of our realistic Jews. A century ago a similar attempt was made to resolve Gotama Buddha into a mythical person, an attempt which utterly failed. How much more perverse and foolish it is to raise this question now, after all the scientific work that has been done in the New Testament, in regard to the Lord Jesus, about whom a hundred times as much is known as we know of Buddha.

Doubtless there are some who will say: We have the image and the words of Him whom we call "Jesus" in any event, and they cannot be taken away from us; what difference does it make whether this image and these words

have an historical or an ideal origin? As I am engaged here in establishing matters of fact, I prefer not to allow myself to be diverted to questions of value and importance. It is enough to reply that Christianity is an historical religion, founded by or on an historical person. The ancient Church was at great pains to defend this position, in her Gospels and in her creeds, and we should not lightly and needlessly abandon it.

Perhaps today, better than ever before, we can understand why in the Apostles' Creed we still say: "He suffered under Pontius Pilate, was crucified, dead and buried." This is the Church's reply to every mythical theory, and her documentary evidence of the human life and death of her Lord.

In conclusion, I may remind you that this mythical theory is not a new one. It existed on a large scale in the second century among the Gnostics and

other fantastic sects, and it was against these speculative dreams that tne realistic statements of the Apostles' Creed, which affirm the facts of Jesus' human life and death, were formulated.

II. THE WITNESS OF FRIENDS

I SPOKE last Sunday of our evidence of the existence of Jesus as an historical person, adducing only the witness of enemies. Today I mean to continue this statement by citing the witness of friends. As these witnesses are unending, I must confine myself this morning to only a few. In this discussion I am not beating the air, I am replying in words of soberness and truth to one of the most radical attacks which Christianity has ever sustained, and I offer this evidence not merely to this congregation, but to the country, to anyone who may care to make use of it.

In considering the witness of friends we naturally think first of St. Paul, who

was converted to Christianity only a few years after the death of Jesus, and whose authentic Epistles form the earliest writings of the New Testament. Paul gloried in being a witness to Jesus Christ; to us, today, he is a witness in a sense he never dreamt of. Paul himself is not a man who can easily be dissolved into a nature-myth or explained away as the personification of religious aspirations. He is too brisk, too human, too combative for that. Even Jensen would hesitate to fit him into his Gilgamesh story. The mythologists are too intelligent to claim Paul as their own. What they assert is that Paul did not regard the Christ he preached as a human being, but as a heavenly being, created in the image of Neo-Platonic philosophy, the second Adam, the man from Heaven — in short, an idea, a lofty, philosophic dream. It must be admitted that there is a considerable element of speculation and metaphysical

thought in Paul's estimate of Jesus, whether Neo-Platonic or rabbinical, but this is never carried to the point of the denial of Jesus' earthly existence. That was reserved for the Gnostics, who were always accounted heretics.

Some of our modern skeptics think it easier to dispose of Paul's witness by denying that any writings of his have come down to us, and that all the Epistles we call Pauline are spurious. As this is a question of general interest, I may briefly comment on it. The validity of certain Epistles of Paul, like Galatians, I Thessalonians, Corinthians, etc., has never seriously been questioned by any great New Testament scholar. Epistles written a little later, like Ephesians and Hebrews, are obviously modeled on the form and substance of the earlier Epistles and presuppose them. A proof of the fact that Paul wrote a number of Epistles is contained in the New Testament itself, in the

second Epistle ascribed to Peter, which is all the more likely to be authentic because it is not particularly complimentary: "Even as our beloved brother Paul also wrote unto you, as also in all his Epistles, wherein are some things hard to understand." Clement of Rome, "a father of the Church," writing before the year 95 A.D. quotes explicitly Paul's first Epistle to the Corinthians and also Ephesians, the Epistle to the Hebrews and I Peter, so that by the end of the first century the later Epistles as well as the earlier were in existence. Paul, in his Epistles, did not invent a new form of literature — letters which were not personal letters but written to groups of persons — for this form of communication is to be found not merely in the Old Testament and its Apocrypha, but among classical authors. Several of Saint Paul's Epistles, like Philemon and II Corinthians are probably only personal letters.

Perhaps no human writings more perfectly reveal the personality of their author, and there are therefore no letters which it would be harder to counterfeit. Writing in Greek, thinking in Greek, no one has done as much as Paul to overthrow the whole Greek conception of life. No one within Christendom except Jesus has given us so many original thoughts in regard to the meaning and duties of life. Thoughts like these do not spring from the ground, nor from the aspirations of communities.

Is it true that Paul tells us nothing of the human life of his Lord, or that he conceived that Jesus had no human life? In I Corinthians he gives us an explicit statement of the founding of the Eucharist, the last supper, the night in which He was betrayed. In the same Epistle he gives us the first and the most exact account of the resurrection appearances of Jesus which we possess.

In Galatians he mentions James as the Lord's brother. In the same Epistle he tells us that Jesus was born of a woman, and, in Romans, of the seed of David after the flesh. In Galatians, that He was educated under the law; in I Corinthians he speaks of the Twelve Apostles. Again and again he alludes to Jesus' sufferings and to his death on the cross. He also mentions several of the Lord's sayings, one of which, but for Paul, we should never have heard—"It is more blessed to give than to receive."

From these statements which I have taken only from the Epistles which are unquestionably Paul's, it would almost be possible to construct an outline of the life of Jesus. So the assertion that Paul did not conceive of Jesus as a human being is not quite correct. In fact it is impossible to suppose that Paul traveled about with St. Luke and St. Mark, who afterward wrote Gospels,

without hearing much of the life of the Lord.

It is true Paul uttered that strange enigmatic saying: "Yea, though we have known Christ after the flesh, yet now henceforth know we him no more." Does this imply that Paul himself was totally indifferent to all those sacred incidents in the life of the Lord which eternally charm us? Does it not rather imply that at some time of his life, perhaps in the last week in Jerusalem, Paul had known, or at least had seen and heard Jesus, but that this contact had done Paul no good, but had hardened him in his unbelief? The people of Nazareth had known Christ after the flesh, but this knowledge only made them wish to murder Him when He began to preach to them.

Paul's interest in the earthly life of Christ was swallowed up in his sudden realization that this being whom he had hated was the Messiah of God, — not

the Messiah of victory and glory, of which he had dreamed, but the Messiah of suffering, of lowly obedience and love and pity, which he had despised. Paul, we must always remember, was not converted by constant companionship with Jesus, nor by Christ's preaching and mighty works. All that he had heard of these only revolted and embittered him. He was converted by a vision of Jesus after Christ's death, and his religion was largely contact with this unseen presence. Hence we have no reason to expect of him lengthy accounts of Jesus' earthly life.

The fact that he recognized Jesus when he saw Him on the way to Damascus, and had no doubt as to his identity, looks as if he had seen Jesus before, when he was living. ("Am I not an Apostle? Have I not seen the Lord?") I freely admit that many of St. Paul's thoughts and doctrinal beliefs

about Christ lie entirely outside the domain of human life and history, but they do not affect his plain allusions to the human facts of Jesus' life which I have cited.

I come now to the Gospels, and here I shall speak plainly, without much reserve. I happen to have one qualification for speaking on a certain aspect of our Gospels, which many better men and better scholars do not possess and which I do not intend to forego. In dealing with this new form of skepticism, it would seem that one must apologize for using the very books which reflect the life of Jesus as proofs of His existence. I do not intend so to stultify myself.

The reason for this is that the Gospels abound in what we call "miracles." Modern science affirms that miracles, in the sense of violations of universal law, do not happen, and without this supposition the scientific explanation

of things would be impossible. These new critics therefore declare that our Gospels, which contain many such occurrences, cannot possibly be regarded as historical recitals, but that they are either fictitious or mythical. This is a position which no great New Testament scholar, not even Strauss, has taken.

There is, however, another way of approaching this subject which, though at present not much considered, will prove the correct way: that is, by regarding such acts not as violations of the laws of Nature, nor as caused by the direct intervention of God, but as due to the operation of psychic or spiritual forces which we are just beginning to rediscover. The old controversy in regard to miracles is as dead as a doornail. The writers of the Gospels do not call these acts "miracles," in our sense of the word, but usually "mighty works." About eighty per cent of these

acts ascribed to Jesus in the Synoptic Gospels (the miracles of John are largely of another order) are the healing of the sick and the expulsion of demons. For the first time in many centuries we are in a position to speak with some confidence on this subject. Beyond all peradventure many sick persons are cured of a great variety of bodily and mental ailments every year by purely spiritual means. I will say nothing about Christian Science, though I do not doubt it works many cures, because, having broken with medicine, it cannot establish a diagnosis, nor prove what it asserts. No such charge can be brought against Lourdes, where highly trained physicians are in attendance, and whose "cures" have been attested by medical men from all parts of the world. I have studied this question attentively and I have had eighteen years of experience of my own, and in all varieties of so-called "spiritual healing"

known to me I distinguish these forms and agencies.

1st. That which is accomplished by psychological methods, the inculcation of metaphysical principles, and the application of normal spiritual teaching, prayer, suggestion, self-suggestion, psycho-analysis, and other attempts to unify personality and to restore social relationship. This applies chiefly to affections of personality.

2nd. Cures which are effected, by what means we know not, by the sheer power of faith, such as we see in the Gospel in the woman healed of the issue of blood, and also in many of the cases treated successfully at Lourdes, St. Anne de Beaupré and other shrines.

3rd. Cures which are effected directly by contact with a highly developed psychic or spiritual personality, and which cannot be assigned to faith alone. When I had the opportunity of examining a number of Mr. Hickson's patients, after

his first visit to Boston, I came to the conclusion that he possessed such a personality. At his meeting with our clergy in the Cathedral, Dr. Kammerer asked him a direct question, and in reply Mr. Hickson told us story after story of his psychic perceptions and experiences. I consider Mr. Hickson's methods objectionable, but I cite him as a well-known example of a man possessing this power. We see evidence of all these forms of healing in the Gospel stories.

4th. Occasional cures which are effected by means which at present we cannot explain, although several such occurrences which have come under my observation have been attended by supernormal psychic phenomena, such as visions, a premonitory voice, etc. Such changes usually take place suddenly, and in several instances known to me they have been permanent, in the sense that they have continued through a term of years. In view of

what we know today, the challenge of all the healing acts of Christ and the rejection of the Gospels because they contain the record of such acts are sheer ignorance and folly.

But, it will be said, the Gospels are subject to a more serious suspicion. They are committed to the ancient superstition that some forms of disease are caused by the invasion of alien spirits. This superstition condemns them on their face. It remains to be seen what the next two generations will think of this superstition. He who thinks that he has spoken the last word in science is a simpleton. A hundred years ago the idea that many physical diseases are caused by the invasion of invisible organisms would have been regarded as a wild superstition. Why? Because at that time men had no evidence of such invasions.

It took me ten years to convince myself that certain changes of personality,

such as dissociation, the emergence of several alien personalities unknown to one another, might be due to the invasion of alien spirits, and I believe in the possibility of such an occurrence only because of evidence I could not evade. If Jesus believed it, it was because He had better evidence. In spite of the splendid scientific training of our alienists and in spite of the vast sums we spend in the maintenance of our asylums, not a very large proportion of their inmates recover their sanity. When the possibility that Jesus' view of certain cases is admitted to be correct and appropriate methods are devised for treating such cases, I have not the slightest doubt that the proportion of recovery will be greatly increased. Of course, this does not apply to organic deterioration of the brain and nervous system.

As this statement will undoubtedly encounter condemnation and ridicule

from men who have no personal knowledge of the subject, I may be allowed to fortify it by two names which the educated, at all events, will regard with respect. William James says: "The refusal of modern 'Enlightenment' to treat 'Possession' as an hypothesis, to be spoken of as even possible, in spite of the massive human tradition based on concrete experience in its favor, has always seemed to me a curious example of the power of fashion in things scientific. That the demon theory will have its innings again is to my mind absolutely certain. One has to be 'scientific' indeed to be blind and ignorant enough to deny its possibility."[6]

It will probably startle you to hear the august name of Immanuel Kant mentioned in this connection. Yet in his comments on the visions of Swedenborg Kant says: "I confess I am very much inclined to assert the existence of

immaterial beings in this world, and to put my soul itself into that class. These immaterial beings form perhaps a great whole which may be called the immaterial world and it will be proved, I do not know where or when, that the human soul in this life is in indissoluble communion with all immaterial natures of the spirit world, on which it acts and from which it receives impressions." Naturally, in accordance with his critical principles, Kant makes this statement only hypothetically.[7]

The Gospel stories of Jesus' treatment of the sick are related with such transparent simplicity and naturalness, some of them are so fortified by Jesus' authentic words; in other cases, like the raising of Jairus' daughter, we can see so plainly the methods He employed, that it would be safe to say that their invention would be more miraculous than the miracle, and the wholesale rejection of the Gospels on this ground

only implies defective knowledge of the very matters under consideration.

Even the so-called nature miracles which are well attested in the Synoptics, like walking on water, though they lie at present beyond our experience, may come within the experience of men a century hence. At all events we are now approaching the subject from the right side, from our growing knowledge of spiritual forces and the operation of spiritual laws. We are engaged in the scientific task of gathering evidence, and we find in the New Testament marvelous examples of occurrences of which we, too, have some experience. Instead of merely denying, we are increasing human knowledge and expanding human nature by observing and experimenting. The Resurrection of Jesus is the most striking example of the value of the new approach to an old problem, as to which I will merely cite the words of the illustrious Frederic

Myers: "A century hence it will be believed by all reasonable men."

If our Gospel tradition, as the mythologists affirm, were the myth of a god in human form, the story would have begun with the descent of this god from heaven, as the late birth-stories of Buddha begin, as the apocryphal Gospel of Marcion in the second century begins. The substance of such a Gospel would be essentially mythical, with a few human traits shining through, and the victory over death and the conquest of hell would have been its great dramatic climax. The resurrection appearances would not have been the modest, brief, psychical events which Paul and the earliest Gospels portray, but massive revelations made to the whole nation. In short, our Gospels would be exactly what we actually possess in a whole aftermath of late apocryphal Gospels which are filled with just such fictions. We have only to compare these highly

painted, fanciful romances with the sober, human quality of our canonical Gospels to see the difference between myth and history.

The mere fact that Jesus' personal appearance is nowhere described, nowhere alluded to in the Gospels, shows how little they are the product of conscious art. Nor is there the slightest attempt to describe the character of the Lord, as any biographer, intent on making his character live, would have tried to do. For this there is only one explanation. The old traditional material, on which the Evangelists drew, did not contain such descriptions and the Evangelists would not invent them.

In dealing with this new form of skepticism one encounters a recklessness of criticism which is self-condemnatory. It is confidently stated that our oldest Gospel of Mark was not written in Palestine and it does not describe Palestine. It was written in Rome, the

whole setting of Mark's Gospel is Roman society, the agrarian system of Italy, the Roman slave world, etc. A whole volume might be written on this subject. Volumes have been written in recent times, and the opinion of the best geographers and historians is that one of the strongest proofs of the historical character of our Synoptic Gospels is the perfect propriety with which they describe the social, moral and political life of Galilee at the times of Jesus. This is the more striking when we remember that immediately after the death of Jesus Galilee disappears from the life of the Church. Having given Jesus to the world, she almost ceased to exist. There was but one time, then, in the history of the early Church, when such pictures of Galilee as we have in the Gospels could have been painted. That was during the life of Jesus. If the story of the life of Jesus had been composed in some distant country, by a man ig-

norant of the geography and social life of Galilee, could such an one have painted the pictures we possess of Capernaum, Chorazin, Bethsaida, Gennesareth, Gadara, the country of the Gergasenes, Decapolis, Cæsarea Philippi and many another little place? Or, if a writer were depicting the life of a mythical deity, what interest would he have had in the names of the Twelve Apostles, Joseph of Arimathea, Simon of Cyrene and Simon the leper, Alexander and Rufus, who play no part whatever, Mary Magdalene, Joanna the wife of Chusa, Susanna and of many another humble person? Or what concern would such a writer have with the Jewish manner of washing the hands before meals, with fasting, praying in public, rules for the observance of the Sabbath, divorce laws, etc., especially as all these were matters which Jesus criticized and rejected. These are not themes of mythology, but table-talk and

the incidents of every-day life, and it is with such humble persons and occurrences that our Gospels are filled. (von Soden) [8]

We have another opportunity to test the historical character of St. Mark's Gospel. The earliest information in regard to this composition purports to come from the quaint old Church writer, Papias, about the year 140 A.D. It is given us by the Church historian, Eusebius (of the fourth century), who quotes from a work of Papias now lost. In commenting on this Gospel, after complaining of Mark's lack of order in relating the incidents of the Lord's life, as to which Papias was quite correct, he adds that Mark derived the material for his Gospel from the conversations and recollections of Simon Peter. Let us look at the Gospel for a moment, and see if we can find evidence for the truth of this assertion which would associate the Gospel especially with Peter, that is

to say with an eye-witness, the chief eye-witness, of Jesus' ministry and His most intimate friend.

After a brief allusion to the ministry of John the Baptist, the baptism of Jesus and the temptation in the wilderness, which is obviously an epitome of more copious information, the broad stream of detailed narrative begins when Peter was called to be a disciple. The stream contracts again when Jesus leaves Capernaum, Peter's home. The narrative becomes graphic and explicit once more when Jesus returns to Capernaum and heals a demoniac there. Then follows the vivid story of Jesus' visit to Peter's house and the cure of his mother-in-law, who lay sick in a fever. Next is mentioned the scene in Peter's boat, when Jesus preached to the people gathered on the shore of the lake. Later, in all the great scenes of Christ's sufferings, Peter plays the leading part. It is Peter who, in reply to Jesus' question,

"Whom do ye say that I am?" utters the decisive word, "Thou art the Christ." It was Peter who rebuked Jesus when the Lord announced His coming death; Peter who, on the Mount of Transfiguration, said, "Lord, it is good for us to be here." In St. Mark, Peter's denial of Jesus is so introduced as to break the thread of his narrative, but to Mark it was a matter of great importance. On the Mount of Transfiguration and in Gethsemane, Peter plays a part almost as great as the part of Jesus. At the resurrection the young man commands the women, "Go tell His disciples and Peter." In short, there is no question that just as John is peculiarly related to the Fourth Gospel, so is Peter to St. Mark's Gospel, but there is this difference. Most of the allusions to John in the Fourth Gospel are intended to glorify "the Beloved Disciple." Many of Mark's allusions to Peter — his vain

self-confidence, his peasant's habit of falling asleep when he ought to have watched with Jesus, his base denial of his Master, his fisherman's oaths and curses, were intended to show Peter's weakness and his Master's reproofs. Does not all this look as if Papias' statement is true, and that Mark did derive much of his information from the lips of that humble, lovable man, who afterward atoned for all his weaknesses by his death? (Johannes Weiss) [9]

There is but one other subject I will discuss. Beyond all peradventure, the most clear and explicit evidence of the existence of Jesus, after His death on the cross, consists in the words He spoke, in the spiritual teachings ascribed to him which have come down to us. When once, St. John tells us, the Scribes and Pharisees sent messengers to take Jesus, they returned empty-handed and, in excuse, they said, " Never man spake

like this man." So every succeeding age has testified. And so our age, with the exception of the mythologists, still testifies. Among these witnesses I cite the noble Jewish names of Montefiori and Klausner. It is idle to say that these words were not spoken by Jesus. They were known to the Christian community before the year 70. Some of them were known to St. Paul. If Jesus did not utter them, who did? And why did not the author of such pearls of literature take credit for his creations? Moreover, these are not the words of a disciple, but of a Master. If we do not wish to speak like children, we must admit that no one else known to us, in the first century, or in any other century, could have uttered them, St. Paul least of all. Even the sayings ascribed to Jesus by St. John, though doubtless they contain many a recollection of Him, have not the heavenly simplicity, the brevity, the pure quality of revelation,

and the lack of all self-consciousness of the Synoptic sayings.

Here, then, is the place where the mythical explanation of Jesus would seem to suffer shipwreck. How does it avoid this fate and retain the confidence of its adherents? By attacking the words themselves by the assurance that these revelations of God and human life, which have been our spiritual food, the source of unnumbered regenerations, are not really very wonderful or very beautiful, or that what is really wonderful and beautiful in them was not the product of Jesus' mind, but was borrowed by Him from the Old Testament or from contemporary Judaism. This was not Jesus' own estimate of the value of His words. He said, "Heaven and earth shall pass away, but my word shall not pass away."

There are certain words ascribed to Jesus in the Gospels and certain situations of life there related which would not have been invented by one who de-

sired to tell the story of a "hero god," an ideal, heavenly being. Among these I may mention the following, "There he could do no mighty work because of their unbelief." "Why callest thou me good? There is none good but one, that is God." "Of that day knoweth no man, not even the angels in Heaven, neither the Son, but only the Father." "My God, my God, why hast thou forsaken me?" also the admission of St. Mark that when Jesus began to teach and to heal, His family believed Him to be demented and came to lay hold of Him. Also the Jews' supposition that Jesus performed His mighty works by an understanding with Beelzebub. As Schmiedel, who has collected these sayings, truly says, "When a profane historian finds before him a historical document which testifies to the worship of a hero unknown from other sources, he attaches, first and foremost, importance to those features which cannot be deduced merely from the fact of his wor-

ship." [10] The passages I have cited are plainly of this character, and they are so interwoven with numerous episodes in the life of the Lord that, in themselves, they offer guarantees of the reality of that life.

Of course, no one can compel another to see beauty and truth in any human composition. When Abraham Lincoln delivered the Gettysburg oration it seems to have been coldly received, and for some time Lincoln was under the impression that the speech was a failure. If a man does not possess spiritual perception and appreciation of greatness, he does not, and no one can give it to him. But in regard to the value of the sayings of Christ in the Gospels, I would rather accept the judgment of Immanuel Kant, Goethe, Balzac, Renan, Matthew Arnold and Theodor Keim, than the judgment of the Jews and the mythologists.

As to the originality of Jesus' teach-

ing, we must admit what we have always known, that the mind of Jesus was saturated with the sacred literature of His people. In the whole course of His life, Jesus had read but one book, if we may call the Old Testament one book, but He had read this book as no other Jew had read it, separating the wheat from the chaff. No other teacher had so filled his being with the great truths of the Prophets and the Psalms. Jesus' use of these Scriptures is very peculiar. He seldom quotes them. They appear sometimes in a new grouping and combination, sometimes as a framework or point of departure for His own thought. But in His use of the old Scriptures He almost always discovers in them new depths, new beauty, new meaning and brings them to a burning focus, as a convex lens gathers up the rays of the sun. Above all, He distinguishes that which is vital and eternally true from that which is temporal

and relative. The greatness of Jesus' teaching consists almost as much in what He eschewed as in what he uttered. Does all this require no originality? Is it not in itself an enormous work of genius? As if to anticipate this very criticism, He compared His Kingdom of God to a householder "who bringeth forth out of his treasure things new and old." And from what source did Jesus derive His parables, His Sermon on the Mount, and a thousand other pearls of beauty and wisdom which have no counterpart in the Old Testament? Certainly not from the Son of Sirach, nor from the insipid Jewish parables and aphorisms of His age, which are frequently cited as His originals. And, I should like to add, if Jesus' words were so wholly derived from Jewish sources, why did the Jews crucify Him for uttering them?

Is Goethe's "Faust" a work devoid of originality and genius, because the

Faust legend was in existence hundreds of years before Goethe wrote his masterpiece? Are Shakespeare's dramas devoid of their originality because he usually took their plots from old stories?

A good deal is made by the Jews of Jesus' supposed dependence on Hillel, a great doctor of the Law who died about ten years before Jesus was born. Many of the traditional stories which have come down to us in regard to Hillel present him in a very pleasing light. He was evidently a man of noble character and, for a Jew of his time, he seems to have had liberal sentiments. Many of his judgments and decisions were mild and gracious, and they are often contrasted with the severity of his fellow-Rabbi, Shammai.

The most famous story told of him relates that one day a heathen, wishing to be instructed in the principles of the Jewish religion, came successively to

Shammai and to Hillel and demanded: "Expound the whole Law to me while I stand on one leg." Shammai, enraged, beat the inquirer with his staff. When Hillel heard the question he replied, "What thou wouldest not another should do to you, do not to him. That is the whole Law, the rest is only comment," — a witty, telling answer under the circumstances. This is supposed to be the origin of Jesus' Golden Rule. Perhaps it is, who can say?

Yet these two sayings are not identical. It was characteristic of Hillel that he said, "do not," and it is characteristic of Jesus that he said, "do." The same injunction, in the very words of Hillel, is related of Confucius more than 500 years before. If I were inclined to employ the reckless methods of our new critics, I might say that Hillel had adopted this saying from the Chinese sage. This seems to me highly improbable and I believe he invented it. If

only Hillel had followed his own maxim and had regarded such a moral principle as the summary of the Law, he might claim some spiritual kinship with Jesus, but, unfortunately, he is said to have been just as much addicted to hair-splitting ceremonial discussions as other Jewish doctors. Hillel did not regard it as a mockery of God and degrading to human intelligence to argue whether an egg laid by a hen on the Sabbath day might be eaten. Though he admitted that the hen who laid the egg was not culpable, since she was not bound to observe the Sabbath, yet he declared that if an Israelite took any part in that act, in the sense of waiting for the hen to lay him an egg, or in cooping her up that she might lay an egg for him on the Sabbath, he was guilty of breaking the Law, and he further commanded that an egg so laid might not be eaten, nor taken into the house, nor carried from one place to another.[11] Here we are breathing

the atmosphere of the Jewish ghetto and we find it stifling.

Strangely, Jesus also spoke of the hen, but He did not indulge in such puerilities as these. He alluded to her passionate maternal love, gathering her brood within the shelter of her widespread wings, which He compared to His own love. "O Jerusalem, Jerusalem, thou that killest the prophets and stonest them which are sent unto thee, how often would I have gathered thy children together, even as a hen gathereth her own brood under her wings, and ye would not." Perhaps no more perfect contrast between the genius of contemporary Judaism and the genius of Christ can be found than that contained in these two sayings.

Will you allow me to allude to one other circumstance in regard to the claim put forth for the originality of Hillel? Hillel uttered these famous words, "What thou wouldest not an-

other should do to thee, do not to him," as a summary of the whole Law. Apart from the fact that this saying is couched in negative terms and carries with it no command of love or social service, it contains no allusion to God nor our relation to God. From these points of view it cannot be regarded as a worthy summary of the Law of Israel.

We remember that a very similar question was once put to Jesus, on the day when a man came to Him and asked, "Master, what is the great commandment of the Law?" And Jesus, instantly combining two of the greatest passages of the Old Testament, one from Deuteronomy and one from Leviticus, replied, "Thou shalt love the Lord thy God with all thy heart and with all thy soul and with all thy mind. This is the first and great commandment. And there is a second like unto it: Thou shalt love thy neighbor as thyself. On these two commandments hang all the

Law and the prophets." This placing side by side of two unsurpassable sayings and separating them from a thousand other injunctions of Scripture, as alone supreme and sufficient, this establishment of all religion on love to God and man, was an act of originality worthy of Jesus and of the highest faith of Israel, in comparison with which Hillel's saying is a betrayal of Israel's greatest deed.

And this is the figure which has most blessed mankind, the living, human Jesus of the Gospels. He has withstood centuries of criticism, and it is not likely at this day that He will fail us or be taken from us. In comparison with the keen, drastic, industrious, searching, malicious criticism of the heathen, Celsus, in the second century, the efforts of our mythologists are but child's play. Philosophies have their day. It is the fate of all dogmas to fail and be rejected one after another. But the personality

of Jesus Christ ever becomes more living as He reveals to us new greatness, new truth, new conceptions of the meaning and possibilities of life, and as He gives new moral strength and new hope to the generations which pass, while He remains.

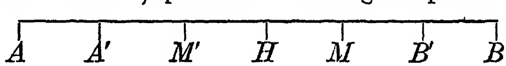
REFERENCES

1. "The Living Age," February sixth, 1926.
2. "Josephus and Our Lord," Diocese of Liverpool Review, Vol. 1, 1926.
3. "Jesus of Nazareth" (Macmillan Co. 1925).
4. "Jesus Christus im Talmud," Heinrich Laible und Dolman, 2te Auflage, Leipzig, 1900.
5. "Das Leben Jesu nach Jüdischen Quellen," Berlin, 1902.
6. "Proceedings of the American Society for Psychical Research, 111, 1909, p. 586.
7. English Translation, "Dreams of a Spirit Seer," New Church Press, London, 1915, pp. 52 and 61.
8. "Hat Jesus Gelebt," Hermann von Soden, Berlin, 1910.
9. Johannes Weiss, "Jesus von Nazareth," Tübingen, 1910.
10. "Encyclopaedia Biblica," Article Gospels, Section 131.
11. "Tractate Betzah," Babylonian Talmud, Vol. IV. Rodkinson's Translation.

elemento (che può anche essere K stesso), il quale non precede il corrispondente (cioè consegue ad esso o è unito). Almeno B è tale

Allora ogni elemento di $\overline{AB}$, o è un elemento H della prima parte, o è un elemento K della seconda; A appartiene alla 1.ª parte, B alla 2.ª; ogni elemento H precede in $\overline{AB}$ ogni elemento K. Si deduce (pel postulato VI) che esiste un elemento M di $\overline{AB}$ tale che ogni elemento precedente ad M è un elemento H, ed ogni elemento conseguente ad M è un elemento K.

Sia M' l'omologo di M (il quale M' cade in $\overline{A'B'}$) e supponiamo che esso preceda M. Allora preso un elemento H interno al segmento $\overline{MM'}$, poichè H precede M, e la corrispondenza è concorde, l'omologo H' di H precede l'omologo M' di M e quindi precede H, ciò che è assurdo per il modo con cui M è stato determinato Similmente si giunge all'assurdo supponendo che M' consegua ad M, infatti allora ogni elemento del segmento $\overline{MM'}$ (l'elemento M' forse escluso) precede l'omologo. e poiche ciò avviene anche per ogni elemento di $\overline{AM}$, si dedurrebbe che ogni elemento interno ad $\overline{MM'}$ è un elemento di H, ciò che è assurdo. Si conclude che M' coincide con M. Dunque M è unico, e, per il modo con cui esso è stato determinato, ogni elemento precedente ad esso precede il corrispondente, e però non è unito. Risulta anche dal fatto che M è unito, che esso appartiene ad $\overline{A'B'}$ oltrechè ad $\overline{AB}$.



Così in questo caso è dimostrato il teorema.

Si può anche osservare che A' non coincidendo con A non è punto unito, e però M non coincide con B; se dunque A', B' sono interni ad $\overline{AB}$, M risulta interno ad $\overline{A'B'}$.

2.° La corrispondenza sia discorde, cioè il segmento $\overline{A'B'}$ abbia senso opposto ad $\overline{AB}$, ossia B' preceda A' nel segmento ordinato $\overline{AB}$.

Traduciamo in linguaggio rigoroso, invertendola, la considerazione intuitiva contenuta nell' osservazione 1.ª del precedente paragrafo.

Si osservi la seguente partizione del segmento ordinato $\overline{AB}$.

a) Un elemento (indicato con H) si dirà appartenente alla prima parte se precede l'omologo H' (in $\overline{A'B'}$). Almeno A è un elemento H.

b) Un elemento (indicato con K) si dirà un elemento della 2.ª parte se non precede l' omologo (e quindi consegue ad esso o è unito)

Almeno B e un elemento K.

Allora, poiche la corrispondenza è discorde, ogni elemento H precede ogni elemento K; infatti se H_1 è un elemento qualsiasi precedente ad H, il suo omologo H'_1 consegue ad H' e a fortiori (ad H e) ad H_1; onde H_1 non può mai essere un elemento K

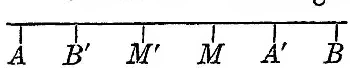
Ogni elemento di $\overline{AB}$ è un elemento H o un elemento K; A è un elemento H e B un elemento K.

Si deduce pel postulato VI che: esiste *un* elemento M di $\overline{AB}$ tale che ogni elemento precedente ad M è un elemento H della prima parte, ed ogni elemento conseguente ad M è un elemento K della seconda. Ad M non precedono elementi uniti.

Dico che M è unito, onde segue il teorema.

Anzitutto si osservi che ogni elemento H (di $\overline{AB}$) precedente ad M ha l' omologo H' nel segmento $\overline{MB}$. Infatti se H_1 è un elemento intermedio ad H, M (in $\overline{AB}$). ed H'_1 è l'omologo di H_1, deve H' seguire H_1' e quindi H_1, onde H' consegue a tutti gli elementi che precedono M Analogamente si prova che ogni elemento K che consegue ad M (in $\overline{AB}$) ha l'omologo K' nel segmento $\overline{AM}$.

Ora sia M' l' omologo di M e suppongasi precedente



ad M. Allora M è distinto da A e quindi A' da M'; il seg-

mento $\overline{A'M'}$ avendo l'estremo M' interno ad $\overline{AM}$ ha con esso infiniti elementi interni comuni; uno di questi H' (precedente ad M) è l'omologo di un elemento H di $\overline{AM}$: ciò che è assurdo.

Parimente si prova l'assurdità che M' segua M. Risulta così dimostrato il teorema Si noti che M sarà interno al segmento $\overline{A'B'}$.

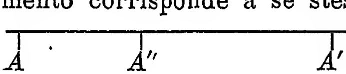
Introdotto il linguaggio del movimento (§ 16), potremo ancora enunciare il precedente teorema, dicendo che « Se si ha una corrispondenza biunivoca sopra una forma di 1.ª specie, tale che mentre un elemento si muove e descrive un segmento, l'altro si muove descrivendo un segmento interno, c'è un primo elemento unito ecc. ».

Osservazione. — Nel secondo caso considerato nella dimostrazione precedente, cioè quando si tratti di una corrispondenza discorde, si ha che l'elemento unito M interno al segmento $\overline{AB}$ è unico, giacchè ogni elemento H che precede M in $\overline{AB}$ precede l'omologo (il quale cade in $\overline{B'M}$), e similmente ogni elemento K che segua M in $\overline{AB}$, segue il suo omologo (che cade in $\overline{A'M'}$).

Nella corrispondenza discorde considerata il segmento $\overline{A'BAB'}$ (complementare di quello $\overline{A'B'}$ nel dato $\overline{AB}$) ha come corrispondente il segmento $\overline{AB}$ complementare di quello dato ed interno ad esso; in questo segmento $\overline{AB}$ (per il teorema stabilito) vi e un elemento unito N della corrispondenza (interno ad esso).

La corrispondenza discorde considerata ha dunque due elementi uniti M, N che separano A, B ed A', B', e separano anche A, A' e B, B'.

Ora sia data un'arbitraria corrispondenza discorde in cui A sia un elemento non unito, avente come omologo un elemento A', (esiste sempre un tale elemento non unito perchè la corrispondenza (detta *identica*) in cui ogni elemento corrisponde a sè stesso è concorde). Ad A' corrisponde un elemento A'' che cadrà in uno dei due segmenti



complementari, AA', o forse in ambedue se A'' coincide con A Al segmento ordinato $\overline{AA''A'}$ (o ad uno dei due segmenti $\overline{AA'}$ se A'' coincide con A) corrisponde nella data corrispondenza uno dei due segmenti ordinati $\overline{A'A''}$ e precisamente (poichè la corrispondenza è discorde) quel segmento $\overline{A'A''}$ contenuto nel dato $\overline{AA'}$, il quale ha il senso opposto ad esso; siamo dunque nel caso di applicare il teorema stabilito e (tenendo conto delle considerazioni svolte già innanzi) si conclude il

Corollario. — *Data in una forma di 1.ª specie una corrispondenza ordinata discorde, si hanno due elementi uniti che separano ogni coppia di elementi omologhi.*

Ciò si può enunciare dicendo:

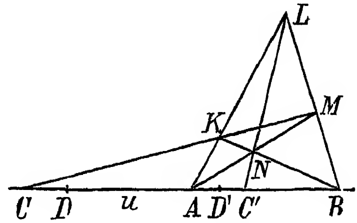
« Se in una forma di 1.ª specie vi è una corrispondenza biunivoca, tale che, mentre un elemento si muove e descrive la forma, il corrispondente si muove e la descrive in senso opposto, vi sono due elementi uniti ecc. », (vale a dire ciò racchiude la conseguenza del 1.° fatto intuitivo (§ 18) che abbiamo notato fra parentesi)

In tal caso se M, N sono i due elementi uniti, ad uno dei due segmenti ordinati $\overline{MN}$ corrisponde l' altro segmento ordinato $\overline{MN}$ che ha senso opposto. Se invece in una corrispondenza ordinata vi sono due elementi uniti MN e ad un segmento ordinato $\overline{MN}$ corrisponde il medesimo segmento $\overline{MN}$ (che ha lo stesso senso) la corrispondenza è concorde; allora due elementi omologhi non separano gli elementi uniti.

Si ha quindi:

In una forma di 1.ª specie una corrispondenza ordinata avente due elementi uniti è concorde o discorde secondochè ad un segmento avente per estremi gli elementi uniti, corrisponde sè stesso o il complementare, cioè secondochè due elementi omologhi distinti separano o no gli elementi uniti.

§ 20. **Coppia che ne separa armonicamente altre due.** — Sopra una retta u siano dati due punti A e B. Si conducano per A e per B le rette AL, BL, aventi il punto comune L, e si conduca la retta MA determinata da un punto M della LB (diverso da L, B) e da A. Ciò posto, il coniugato armonico

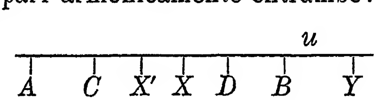


C' di un punto C della retta u rispetto ad AB si determina proiettando C da M su AL nel punto K, proiettando quindi K da B su AM in N, e finalmente proiettando N da L su u in C'. La corrispondenza biunivoca tra C, C' sulla u si costruisce dunque con un numero finito di proiezioni e sezioni e però è ordinata (pel postulato V). Le nominate costruzioni fanno corrispondere ad A, B sè stessi; essi sono perciò elementi uniti nella corrispondenza. Se C, C' sono due punti omologhi non uniti, mentre un punto si muove su u descrivendo il segmento ordinato CAC', il corrispondente descrive il segmento ordinato $C'AC$ che è lo stesso ordinato in senso opposto; perciò ogni punto D interno al detto segmento ha il suo corrispondente D′ interno ad esso; analogamente si dica se D è invece interno al segmento CBC'; in ogni caso dunque CC', DD' non si separano.

Più in generale per ogni forma di 1.ª specie sussiste l'enunciato: « Se due coppie di elementi di una forma di 1.ª specie si separano, non esiste una coppia che le separi armonicamente entrambe ».

Riferendoci ancora ad una retta u, si considerino su di essa due coppie di punti AB, CD che non si separino. Esisterà una coppia di punti che le separi armonicamente entrambe?

Si consideri sulla u la corrispondenza che nasce tra i punti X, X' che sono coniu-



gati armonici di uno stesso Y rispetto alle coppie AB, CD. Essa è il prodotto di due riferimenti di u a sè stessa mediante proiezioni e sezioni, quindi si passa da X a X' nella u con un numero finito di proiezioni e sezioni, vale a dire eseguendo prima le proiezioni e sezioni necessarie per costruire Y dato X, e poi quelle necessarie per costruire X' dato Y, la corrispondenza tra X e X' è dunque ordinata.

Ora si consideri il segmento $\overline{ACDB}$ (o $\overline{ADCB}$) della retta u. Un punto X di esso ha rispetto ad AB un coniugato armonico Y nel segmento $\overline{AB}$ complementare, ed il coniugato armonico X' di Y rispetto a CD cade nel segmento $\overline{CD}$ interno ad $\overline{ACDB}$

Mentre un punto X si muove descrivendo il segmento $\overline{ACDB}$, il corrispondente si muove entro questo segmento, dunque (pel § 19) esiste almeno un punto X del segmento $\overline{ACDB}$ che coincide col corrispondente X'. Questo punto ha il medesimo coniugato armonico, rispetto alle coppie AB, CD e fornisce quindi una coppia che le separa armonicamente entrambe.

Ciò dimostra l'esistenza di una coppia siffatta.

Il ragionamento si ripete ugualmente per le altre forme di 1.ª specie

Risulterà dimostrato più tardi che la coppia che separa armonicamente AB, CD è unica. Intanto, enunciando i risultati ottenuti si ha il.

Teorema. — *In una forma di 1.ª specie non esiste alcuna coppia di elementi che separi armonicamente due coppie che si separano fra loro; esiste invece una coppia (almeno) che separa armonicamente due coppie le quali non si separano.*

Corollario. — *La corrispondenza che intercede fra due forme di prima specie, riferite in modo che ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponda un gruppo armonico dell'altra, è* ordinata.

Consideriamo il caso di due punteggiate u ed u' Basta stabilire che a due coppie di elementi AB, CD della u che si separano, corrispondono due coppie di elementi $A'B'$, $C'D'$ della u' che si separano.

Ora la dimostrazione si fa per assurdo. Se le $A'B'$, $C'D'$ non si separano, esiste almeno una coppia di elementi $M'N'$ della u', separante armonicamente ambedue le nominate coppie $A'B'$, $C'D'$. A questa corrisponde in u' una coppia di elementi MN che (per la definizione della corrispondenza) deve separare armonicamente le coppie AB, CD perchè ai gruppi armonici $(A'B'M'N')$, $(C'D'M'N')$ di u', debbono corrispondere su u rispettivamente i gruppi armonici $(ABMN)$, $(CDMN)$; ma questa conclusione è assurda perchè, le coppie AB, CD separandosi, non esiste una coppia che le separi armonicamente entrambe

CAPITOLO V

Il teorema fondamentale della proiettività.

§ 21. Riprendiamo, riassumendoli, i concetti posti nel § 16. — Abbiamo ivi dato il concetto di corrispondenza biunivoca tra due forme u, u' (della stessa specie) e il concetto di prodotto; abbiamo pur detto che una corrispondenza biunivoca tra u, u' si può considerare in due modi. come un' operazione che fa passare da u ad u', o come l' operazione inversa della prima, che fa passare da u' ad u; questa considerazione è specialmente essenziale se le u, u' sono sovrapposte.

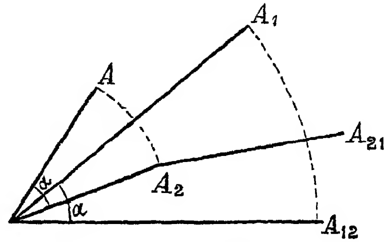
Date n forme (della stessa specie) $u_1\, u_2\, u_3 \ldots\ldots u_n$ ed $n-1$ corrispondenze biunivoche $\pi_1\, \pi_2\, \pi_3 \ldots \pi_{n-1}$ rispettivamente tra u_1, u_2; u_2, u_3; ....; u_{n-1}, u_n, il prodotto $\omega \equiv \pi_{n-1} \ldots\ldots \pi_2\, \pi_1$ è la corrispondenza biunivoca composta che risulta tra u_1 ed u_n.

Per definizione è dunque.

$$\pi_3\, \pi_2\, \pi_1 \equiv \pi_3\, (\pi_2\, \pi_1)$$
$$\pi_4\, \pi_3\, \pi_2\, \pi_1 \equiv \pi_4\, (\pi_3\, (\pi_2\, \pi_1))\ \text{ecc.}$$

I prodotti di corrispondenze biunivoche non soddisfano in generale alla *legge commutativa* dei prodotti ordinari, cioè non si ha in generale $\pi_2\, \pi_1 \equiv \pi_1\, \pi_2$. Basta

considerare come esempio * le corrispondenze generate in un piano da una traslazione e da una rotazione attorno ad un punto (v. figura). Due corrispondenze biunivoche π_1, π_2 si diranno *permutabili* se per esse è $\pi_2 \pi_1 \equiv \pi_1 \pi_2$ (ciò che non accade in generale). Invece vale sempre pei prodotti di corrispondenze biunivoche $\pi_n \ldots\ldots \pi_2 \pi_1$ la *legge associativa* dei prodotti ordinari, cioè si ha $\pi_n \ldots\ldots \pi_4 \pi_2 \pi_1 \equiv \pi_n \ldots\ldots (\pi_3 \pi_2) \pi_1$ ecc.; ciò è insito alla natura del concetto di prodotto.



La corrispondenza tra due forme sovrapposte, in cui ad ogni elemento corrisponde sè stesso, dicesi *identica* e si designa con 1.

Se tra due forme u, u' è posta una corrispondenza biunivoca π, denotando con π^{-1} l'inversa tra u' ed u, si ha (per definizione) che $\pi^{-1} \pi$ è la corrispondenza identica in u, cioè:

$$\pi^{-1} \pi \equiv 1.$$

Nel § 15 abbiamo anche considerato particolari corrispondenze biunivoche tra forme della stessa specie; abbiamo definito come *prospettive* due forme (della stessa specie) che sono l'una proiezione dell'altra o ambedue proiezioni o sezioni di una medesima (se sono omonime), ed abbiamo detto *riferite mediante proiezioni e sezioni* due forme (della stessa specie) riferite tra loro con una corrispondenza biunivoca, che sia un prodotto (d'un numero finito) di prospettività.

Mentre due forme prospettive ad una terza non sono in generale prospettive fra loro, due forme riferite mediante proiezioni e sezioni ad una terza risultano ancora riferite fra loro mediante proiezioni e sezioni, (perchè il prodotto di due prospettività non è in generale una pro-

spettività, ma il prodotto di due prodotti di prospettività è un prodotto di prospettività).

Rispetto alle forme di 1.ª specie, riferite mediante proiezioni e sezioni, avevamo il teorema:

Se due forme di 1.ª specie sono riferite mediante proiezioni e sezioni, ad ogni gruppo armonico dell' una corrisponde un gruppo armonico dell' altra.

Questo esprime una proprietà delle corrispondenze biunivoche, ottenute mediante un numero finito di proiezioni e sezioni. Ci siamo domandati se tale proprietà sia caratteristica per siffatte corrispondenze, se cioe viceversa « date due forme di 1.ª specie riferite in modo che ad ogni gruppo armonico dell' una corrisponda un gruppo armonico dell' altra, si possa passare da un elemento dell' una al corrispondente dell' altra (cioè *costruire* la corrispondenza) mediante proiezioni e sezioni ».

A questo problema si potrà ora dare una risposta affermativa in conseguenza dello studio delle corrispondenze biunivoche tra forme di 1.ª specie, conservanti i gruppi armonici, dopo che avremo imparato a caratterizzare tali corrispondenze e a darne le relative costruzioni.

Diremo

proiettive due forme di 1.ª specie riferite fra loro in modo che ad ogni gruppo armonico dell'una corrisponda un gruppo armonico dell' altra;

proiettività la corrispondenza fra esse (corrispondenza biunivoca che conserva i gruppi armonici).

Due forme riferite mediante proiezioni e sezioni saranno certo proiettive; ma non possiamo per ora asserire la verità inversa, cioè che ogni proiettività possa costruirsi mediante proiezioni e sezioni.

Due forme di 1.ª specie proiettive ad una terza sono proiettive fra loro, cioè il prodotto di due proiettività è una proiettività.

Vogliamo caratterizzare la proiettività partendo dalla proprietà che la definisce. Allora la questione essenziale che occorre risolvere è quella di vedere « quali condizioni determinano una proiettività tra due forme di prima specie e come essa possa costruirsi ».

Essa viene risoluta dal seguente:

Teorema fondamentale. — *Esiste una proiettività tra due forme di 1.ª specie in cui a tre elementi dell'una corrispondono tre elementi dell'altra.*

Questa proiettività è unica e si può porre mediante un numero finito di proiezioni e sezioni.

La dimostrazione del teorema enunciato, che è fondamentale nella teoria della proiettività, si fa seguendo l'ordine di concetti che viene qui indicato, e che sarà svolto partitamente nei successivi §§ di questo capitolo

1). Date due forme di 1.ª specie u, u' e fissate in esse due terne di elementi ABC, $A'B'C'$, si possono riferire le u, u' mediante proiezioni e sezioni in guisa che ad A, B, C corrispondano ordinatamente A', B', C'.

Esiste dunque (almeno) una proiettività tra u, u' in cui si corrispondono le terne fissate.

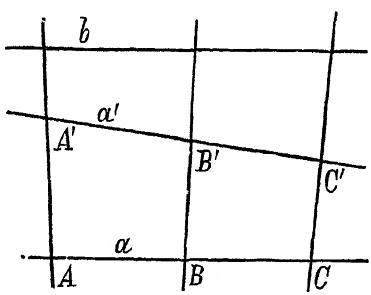
2). Se tra u, u' esistessero due proiettività in cui ad A, B, C corrispondano rispettivamente A', B', C', si avrebbe su u una proiettività non identica, avente tre elementi uniti A, B, C.

3). Se in una forma di 1.ª specie si ha una proiettività nella quale tre elementi sono uniti, anche tutti gli elementi sono uniti (cioè la proiettività è identica). Questo terzo enunciato è la parte sostanziale del teorema sopra enunciato; perciò ad esso soltanto si attribuisce più specialmente il nome di *teorema fondamentale* (di Staudt).

§ 22. — Per dimostrare la proprietà 1) possiamo sostituire alle date forme u, u' delle forme ad esse prospettive, perchè forme di 1.ª specie riferite mediante

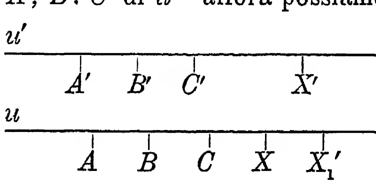
proiezioni e sezioni ad una terza, risultano riferite tra loro mediante proiezioni e sezioni. Se dunque una di esse (o ambedue) e un fascio di raggi o di piani, sostituiremo al fascio una punteggiata sezione (prospettiva ad esso); se poi si avranno due punteggiate v, v' incidenti o sovrapposte, potremo proiettare una di esse, per es. v, da un asse (sghembo a v) sopra una retta sghemba a v'. Pertanto la dimostrazione dell' enunciato 1, si riduce sempre a quella del seguente:

Sieno date due rette sghembe $a\, a'$ e su di esse rispettivamente due terne di punti $A\,B\,C$. $A'\,B'\,C'$; si può passare da a ad a' mediante proiezioni e sezioni in guisa che ad A, B, C corrispondano A', B', C'.



Vediamo effettivamente che basta per ciò eseguire una sola proiezione di a sopra a' da un asse conveniente b; Invero è sufficiente a tal fine scegliere come asse b una delle infinite rette diverse da a, a', che sono incidenti alle tre rette sghembe AA', BB', CC' (di queste rette ve n'è *una* per ogni punto di AA' Cfr. § 8).

§ 23. La proposizione 2) è subito stabilita. — Sieno invero π, τ due proiettività intercedenti tra u, u' nelle quali ai punti A, B, C di u corrispondano rispettivamente i punti $A', B'. C'$ di u' allora possiamo considerare su u la proiettività $\tau^{-1}\pi$ nella quale si corrispondono elementi (come $X'\,X_1'$) che hanno su u' lo stesso omologo (X') in π, τ.



Questa proiettività ha come elementi uniti A, B, C e non è identica se non è $\pi \equiv \tau$.

§ 24. Pertanto siamo ridotti alla dimostrazione della proposizione fondamentale 3). — Tale dimostrazione si compie stabilendo successivamente i seguenti punti salienti:

a) Se in una forma di 1.ª specie si ha una proiettività dotata di tre elementi uniti, ma non identica, esiste un segmento della forma avente gli estremi M, N uniti, entro cui non cadono altri elementi uniti.

b) Nell'ipotesi *a)* uno almeno dei tre elementi uniti dati deve essere esterno al detto segmento MN, e perciò il suo coniugato armonico rispetto ad M, N deve essere interno al detto segmento; questo elemento risulta così unito contro l'ipotesi, l'ipotesi *a)* è dunque assurda, ciò che dimostra il teorema.

Svolgiamo successivamente nei suoi dettagli il ragionamento indicato.

§ 25. Nella forma di 1 ª specie u sia stabilita una proiettività avente tre elementi uniti A, B, C.

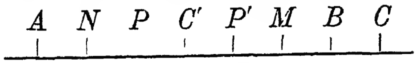
Supponiamo che essa non sia identica, ossia che esista in u un elemento P non unito, avente quindi un corrispondente P' diverso da P. Dico che:

Vi è su u un segmento MN avente gli estremi uniti, entro cui non cadono elementi uniti della corrispondenza.

Se, per fissare le idee, supponiamo che P cada nel segmento AB non contenente C, P' dovrà cadere nello stesso segmento perchè la coppia PC separando la AB, deve pur avvenire che si separino le coppie omologhe $P'C$, AB (ossia deve avvenire che il segmento $\overline{APB}$ corrisponda a sè stesso). Ancora per fissare le idee (indifferente è ammettere l'ipotesi opposta) si supponga che P' consegua a P nell'ordine (ABC), cioè nel nostro segmento ordinato $\overline{APB}$.

Riferiamoci ai segmenti contenuti in $\overline{APB}$, che possiamo quindi indicare denotandone soltanto gli estremi. Abbiamo che agli elementi del segmento $\overline{PB}$ corrispon-

dono, nella data proiettività, quelli del segmento $\overline{P'B}$ interno ad esso (essendo il segmento $\overline{APB}$ corrispondente a sè stesso); cioe mentre P si muove descrivendo il segmento $\overline{PB}$, il punto corrispondente si muove descrivendo, nello stesso senso, $\overline{P'B}$. Dunque (§ 19) esiste in $P'B$ un primo elemento unito M (che può anche coincidere con B) tale che in PM non cadono altri elementi uniti.



In modo analogo, ragionando sulla proiettività inversa della data (che ha i medesimi elementi uniti), si deduce l'esistenza di un elemento unito N in PA (che può anche essere lo stesso A), tale che nel segmento PN non cadano altri elementi uniti della proiettività.

Si perviene così a stabilire l'esistenza d'un segmento MN (contenente PP' e contenuto nel dato AB cui non appartiene C), il quale ha per estremi due elementi uniti ed e tale che entro ad esso non vi sono elementi uniti.

La conclusione ottenuta è assurda, come afferma l'enunciato *b)*.

Infatti si consideri il coniugato armonico C' di C rispetto ad M, N Poichè C, C' separano M, N (§ 12-15), C è *interno* al segmento MN considerato, e perciò non dovrebbe essere unito; invece al gruppo armonico $(MNCC')$ deve corrispondere nella nostra proiettività (in cui M, N. C sono uniti) un gruppo armonico $(MNCC'')$, quindi C'' quarto armonico dopo MNC coincide con C' (§ 12-15) ossia C' (elemento interno ad MN) è unito.

Questo assurdo prova che non può sussistere l'ipotesi da cui siamo partiti, cioè non esiste nel dato segmento AB un elemento P distinto dal corrispondente. Analogamente si prova che sono uniti tutti gli elementi del segmento BC non contenente A e quelli del segmento CA non contenente B. Così resta stabilito che sono uniti tutti gli elementi della forma u. Resta dunque stabilito il teorema fondamentale enunciato nel § 21.

Osservazione. — La dimostrazione è essenzialmente fondata sul teorema del § 19, ed è mediante questo che compare l'applicazione del postulato della continuità. È opportuno notare che interviene qui l'applicazione di quel teorema soltanto per il caso delle corrispondenze concordi (1.° caso), poichè, nella ipotesi della precedente dimostrazione, al segmento $\overline{AB}$ (non contenente C) corrisponde il medesimo segmento ordinato $\overline{AB}$ (che ha lo stesso senso di sè stesso) e però la proiettività concorde.

(Il fatto che una corrispondenza ordinata avente due elementi uniti, estremi di un segmento corrispondente a sè stesso, è necessariamente concorde, è già stato notato nel corollario del citato teorema, § 19).

CAPITOLO VI

Proiettività tra forme di 1.ª specie.

§ 26. **Rette proiettive sghembe.** — Abbiamo dimostrato che. « Esiste *una* proiettività tra due forme di 1.ª specie, in cui si corrispondono due terne di elementi fissati in esse », ed abbiamo visto pure la possibilità di costruire la corrispondenza proiettiva mediante proiezioni e sezioni (ciò che giustifica il nome di *proiettività*).

Nasce ora il problema di assegnare nel modo più semplice le effettive costruzioni della proiettività determinata tra due forme di 1.ª specie u, u' da due terne fissate ABC, $A'B'C'$, di elementi omologhi; proiettività che potrà indicarsi con $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$.

In questo esame ci limitiamo a considerare la proiettività tra forme di 1.ª specie omonime; date due forme di 1.ª specie di nome diverso, si sostituirà all' una di esse una sua proiezione o sezione, omonima all' altra. Cominciamo dall' esaminare la proiettività tra due rette punteggiate sghembe o tra due fasci di piani cogli assi sghembi; quindi parleremo della proiettività tra le forme di 1.ª specie contenute in una di 2.ª specie, limitandoci a considerare quelle contenute nel piano; e si enunceranno per esercizio

i teoremi correlativi (nello spazio) della geometria della stella. Nelle costruzioni, di cui andiamo a trattare, parlando di due forme, intendiamo che esse sieno *distinte* salvo esplicito avviso. Enunciamo e dimostriamo accanto ad ogni teorema anche il correlativo, rispettivamente, nello spazio o nel piano, perchè importa che si acquisti familiarità colle costruzioni indicate.

Sussistono i seguenti teoremi correlativi nello spazio:

Due punteggiate sghembe proiettive, sono prospettive (sezioni di uno stesso fascio di piani).

Sieno u, u' le due punteggiate; ed ABC, $A'B'C'$ due terne di punti omologhi rispettivamente su u, u'.

Costruiamo le tre rette $a = AA'$, $b = BB'$, $c = CC'$, congiungenti le tre coppie di punti omologhi, che risultano sghembe. Esistono infinite rette u'' incidenti ad a, b, c, giacchè per un punto di una di esse passa una retta incidente alle altre due (e alla prima). Considerando un fascio di piani avente per asse una tale retta u'', le due punteggiate u, u' risultano riferite prospettivamente come sezioni di questo fascio, in modo che le coppie AA', BB', CC', si corrispondono: perciò questa prospettività è la proiettività determinata

Due fasci di piani proiettivi cogli assi sghembi, sono prospettivi (proiezioni di una stessa punteggiata).

Sieno u, u' i due fasci di piani ed $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$ due terne di piani omologhi rispettivamente di u, u'.

Costruiamo le tre rette $a = \alpha\alpha'$, $b = \beta\beta'$, $c = \gamma\gamma'$, intersezioni delle tre coppie di piani omologhi, che risultano sghembe. Esistono infinite rette incidenti ad a, b, c, giacchè in un piano per una di esse vi è una retta incidente alle altre due (e alla prima). Considerando una punteggggiata avente per sostegno una tale retta u'', i due fasci u, u' risultano riferiti prospettivamente come proiezione di questa punteggiata, in modo che le coppie $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$ si corrispondono: perciò questa prospettività è la proiettività determinata

tra u, u' dalla corrispondenza delle due terne ABC, $A'B'C'$.

Così si ha la costruzione più semplice della proiettività tra due punteggiate sghembe.

tra u, u' dalla corrispondenza delle due terne $\alpha\beta\gamma$, $\alpha'\beta'\gamma'$.

Così si ha la costruzione più semplice della proiettività tra due fasci di piani sghembi.

(Questa è la costruzione già indicata nel § 22).

Osservazione 1.ª — Se le due rette sghembe punteggiate u, u' sono riferite proiettivamente (e quindi prospettivamente), risultano riferiti proiettivamente (e quindi prospettivamente) anche i fasci di piani aventi per assi u, u', ove si considerino come omologhi i piani per u, u' che segano punti omologhi rispettivamente su u', u. Sussiste correlativamente la proprietà inversa.

Si hanno allora infinite rette d incidenti ad u, u', ciascuna delle quali congiunge due punti omologhi D, D', di u, u', ed è sezione di due piani omologhi dei due fasci $\delta \equiv uD'$, $\delta' \equiv u'D$. Queste infinite rette due a due sghembe generano una *superficie rigata* correlativa di sè stessa.

Osservazione 2.ª — La costruzione della proiettività tra due punteggiate sghembe non è più applicabile se le due punteggiate sono incidenti e non può dirsi allora che le due punteggiate risultino sezioni di uno stesso fascio di piani, poichè, secondo le definizioni del capitolo 1.°, dobbiamo considerare come *sezioni* di un fascio di piani solo le punteggiate prospettive al fascio, non incidenti all'asse del fascio; una retta incidente all'asse d'un fascio di piani incontra in uno stesso punto tutti i piani del fascio e non risulta *riferita* prospettivamente al fascio secondo la definizione del § 15.

Si vede anzi che se due punteggiate u, u' incidenti sono prospettive come sezioni di uno stesso fascio di piani (il cui asse s non deve essere incidente ad u, u') esse saranno pure sezioni di uno stesso fascio di raggi, cioè del fascio (di centro us) sezione del piano $\alpha \equiv uu'$.

Viceversa due punteggiate (incidenti) prospettive e sezioni di uno stesso fascio di raggi, sono sezioni di uno stesso fascio di piani, proiezione del fascio di raggi.

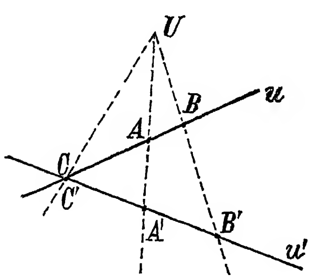
Valgono le avvertenze correlative pei fasci di piani.

§ 27. **Forme prospettive nel piano.** — Secondo l'osservazione 2.ª del precedente §, la questione di decidere se due punteggiate incidenti (distinte) sieno prospettive, si riconduce sempre alla questione di geometria piana, di esaminare se esse sono sezioni di uno stesso fascio di raggi (nel piano delle due rette).

Sussistono i seguenti teoremi correlativi nel piano:

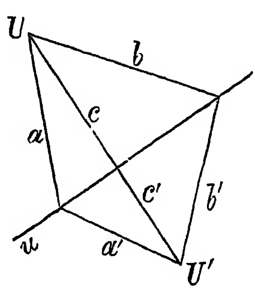
Nel piano

la condizione necessaria e sufficiente perchè due punteggiate proiettive (distinte) sieno prospettive è che il punto comune alle due punteggiate sia un punto unito.



In primo luogo, se le punteggiate u, u' sono prospettive (nel piano), e però sezioni di un fascio di raggi di centro U (fuori di u, u'), ogni punto A di u si pro-

la condizione necessaria e sufficiente perchè due fasci di raggi proiettivi (distinti) sieno prospettivi è che il raggio comune ai due fasci sia un raggio unito.



In primo luogo, se i due fasci di raggi U, U' sono prospettivi, e però proiezioni di una stessa punteggiata di asse u (non appartenente ad $U\,U'$), ogni raggio a di U

retta da U su u' nel suo omologo A', e quindi l'omologo C' del punto $C \equiv u\,u'$, comune alle due punteggiate, coincide con C ($C \equiv C'$). Così è stabilita la prima parte del teorema.

vien segato con u in un punto, la cui proiezione dal centro U' del fascio U' è l'omologo a', e quindi l'omologo c' del raggio $c \equiv U\,U'$, comune ai due fasci coincide con c ($c \equiv c'$). Così è stabilita la prima parte del teorema.

Per stabilire l'inversa, si osservi che, se le punteggiate u, u' sono proiettive ed il loro punto comune C (considerato su u) coincide coll'omologo C' (su u'), cioè $C \equiv C'$, la proiettività tra u, u' si può riguardare come determinata dalla corrispondenza delle due terne di punti omologhi $A\,B\,C$ ed $A'\,B'\,C'$.

Per stabilire l'inversa, si osservi che, se i fasci di raggi $U\,U'$ sono proiettivi ed il loro raggio comune c (considerato in U) coincide coll'omologo c' (in U'), cioè $c \equiv c'$, la proiettività tra U, U' si può riguardare come determinata dalla corrispondenza delle due terne di raggi omologhi $a\,b\,c$ ed $a'\,b'\,c'$.

Ora le rette $A\,A'$, $B\,B'$ determinano un punto U, e le u, u' vengono riferite prospettivamente come sezioni del fascio di raggi di centro U, in modo che ai punti A, B, C di u corrispondono rispettivamente su u' i punti A', B', $C' \equiv C$, questa prospettività non differisce dunque dalla data proiettività $\begin{pmatrix} A\,B\,C \\ A'B'C \end{pmatrix}$.

Ora i punti aa', bb' determinano una retta u, ed U, U' vengono riferiti prospettivamente come proiezioni della punteggiata di sostegno u, in modo che ai raggi a, b, c di U corrispondono rispettivamente in U' i raggi a', b', $c' \equiv c$; questa prospettività non differisce dunque dalla data proiettività $\begin{pmatrix} a\,b\,c \\ a'b'c \end{pmatrix}$.

Osservazione. — I teoremi precedenti forniscono la più semplice costruzione della proiettività tra due rette o due fasci di raggi di un piano, aventi l'elemento comune unito.

Risulta dal precedente teorema, a sinistra, che *due punteggiate incidenti proiettive* u, u′ *non sono in generale prospettive*, perchè si può fissare che al punto $C \equiv u\,u'$, considerato come appartenente ad u, debba corrispondere su u' un punto C' diverso da C, e resta ancora la scelta arbitraria di due coppie di elementi omologhi per determinare la proiettività tra u, u'.

Similmente non sono in generale prospettivi due fasci di raggi proiettivi di un piano. Si può anche vedere analogamente che anche due fasci di raggi proiettivi appartenenti a piani diversi non sono in generale prospettivi: la condizione perchè ciò avvenga, ove il centro di un fascio non appartenga al piano dell' altro, è che i due fasci siano insieme proiezioni della stessa retta comune ai loro piani e sezioni del fascio di piani avente per asse la congiungente i loro centri: uno di questi fatti porta di conseguenza l' altro.

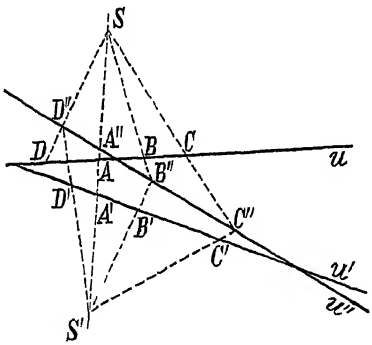
§ 28. **Forme proiettive nel piano.** — Sussistono i seguenti teoremi correlativi nella geometria piana:

Nel piano

proiettando due punteggiate proiettive distinte u, u′, *rispettivamente da due punti fuori di esse, appartenenti alla retta che ne congiunge due punti omologhi (ambedue diversi dal punto* u u′*), si ottengono due fasci di raggi prospettivi; esiste quindi una retta (sezione comune dei due fasci) prospettiva alle* u, u′.

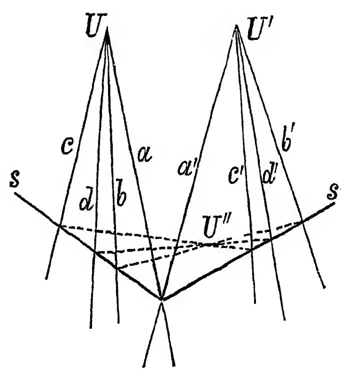
segando due fasci di raggi proiettivi distinti U, U′, *rispettivamente con due rette fuori di essi, passanti per il punto d' intersezione di due raggi omologhi (ambedue diversi dal raggio comune* U U′*), si ottengono due punteggiate prospettive; esiste quindi un fascio di raggi (proiezione comune delle due punteggiate) prospettivo ad* U, U′.

Sieno AA', BB', CC' tre coppie di punti omologhi nelle punteggiate u, u'; una almeno di queste coppie, ad esempio $A\,A'$, non contiene il punto $u\,u'$, e quindi sulla retta AA' (distinta da u, u') possono scegliersi due punti S, S' rispettivamente fuori di u, u' Proiettando da S, S' rispettivamente u, u', si hanno due fasci di raggi proiettivi



aventi come unito il raggio SS' e però prospettivi (§ 27): la sezione comune dei due fasci è la retta $u'' \equiv B''C''$ determinata dai punti $SB \cdot S'B'$ e $SC \cdot S'C'$. La u'' risulta prospettiva alle u, u', e quindi si costruisce l' omologo di un punto D su u (nella data proiettività tra u, u') proiettandolo da S su u'' in D''

Sieno $a\,a'$, $b\,b'$, $c\,c'$ tre coppie di raggi omologhi nei fasci di raggi U, U': una almeno di queste coppie, ad esempio $a\,a'$, non contiene il raggio UU', e quindi pel punto $a\;a'$ (distinto da U, U') possono scegliersi due rette s, s', rispettivamente non appartenenti ad U, U'. Segando con s, s' rispettivamente U, U', si hanno due



punteggiate proiettive aventi come unito il punto $s\,s'$ e però prospettive (§ 27): la proiezione comune delle due punteggiate è il fascio di raggi di centro $U'' \equiv b''\,c''$, determinato dai raggi congiungenti i punti $sb \cdot s'b'$ e $sc \cdot s'c'$. Il fascio U'' risulta prospettivo ad U, U', e quindi si costruisce l'omologo di un

e quindi proiettando D'' da S' su u', nel punto D'.

raggio d di U (nella data proiettività tra U, U') segando d con s, proiettando il punto $d\,s$ mediante il raggio d'' da U'' su s', e quindi proiettando da U' il punto $d''s'$ secondo il raggio d'.

La condizione perchè le u, u' sieno prospettive (data nel § 27) si riduce al fatto che la u'' passi pel punto $u\,u'$, ciò che in generale non avviene.

La condizione perchè U, U' sieno prospettivi (§ 27) si riduce al fatto che il centro U'' del fascio U''. appartenga al raggio $U\,U'$, ciò che in generale non avviene.

Osservazione 1.ª — Le cose dette permettono la costruzione più generale della proiettività tra forme di 1ª specie nel piano.

Conviene nel caso a sinistra di prendere come punto S il punto A' e come punto S' il punto A. la retta u'' costruita in tale ipotesi si dice *asse di collineazione* della proiettività tra u ed u'.

Conviene nel caso a destra di prendere $s \equiv a'$ ed $s' \equiv a$: il puto U'' costruito in tale ipotesi si dice *centro di collineazione* della proiettività tra i due fasci UU'.

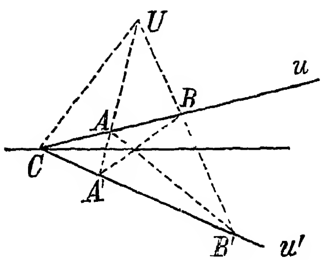
L'asse di collineazione è indipendente dalla coppia di elementi corrispondenti A, A′ *che si scelgono per costruirlo*

Il centro di collineazione è indipendente dalla coppia di elementi corrispondenti a, a′ *che si scelgono per costruirlo.*

Infatti, riferendoci al caso a sinistra ed escludendo dapprima la prospettività, la proposizione segue dall'osservare che i punti in cui l'asse di collineazione sega u ed u' sono i corrispondenti del punto comune alle due punteggiate, e riescono quindi indipendenti dalla coppia AA' scelta.

Se poi le due rette u ed u' sono prospettive, (sicchè l'asse di collineazione sega u, u' nello stesso punto ad esse

comune), si vede subito dalla figura, che l'asse di collineazione è il quarto armonico, rispetto ad u ed u' del raggio proiettante $C \equiv uu'$ dal centro di prospettività, e perciò esso anche in questo caso riesce indipendente dalla coppia AA'.



Osservazione 2.ª — Abbiamo, nel caso a sinistra, infinite rette come AA', BB', CC', ecc., congiungenti due punti omologhi di u, u', l'insieme delle quali costituisce un *inviluppo*. Se u, u' non sono prospettive, non avviene mai che più di due rette siffatte passino per un punto, altrimenti questo risulterebbe il centro di un fascio proiezione comune di u, u

In modo correlativo se U, U' non sono prospettivi il luogo dei punti comuni ai raggi corrispondenti, l'insieme dei quali costituisce una *linea*, non può avere piu di due punti comuni con una qualunque retta del piano.

§ 29.* **Punteggiate simili e fasci di raggi uguali** — Si abbiano in un piano due punteggiate proiettive proprie u, u' Movendo una di esse, le due punteggiate rimangono proiettive (poichè, cfr § 17, ogni gruppo armonico si conserva sempre tale nel movimento); ma se u, u' sono prospettive, esse non si conservano prospettive dopo il movimento

Supposto ora che si abbiano due punteggiate proprie proiettive, non prospettive, u, u', tali che ad un punto A di u corrisponda in u' un punto A', moviamo u' in guisa che assuma una posizione distinta da u, sovrapponendo A' ad A; dopo ciò (§ 27) le u, u' divengono prospettive.

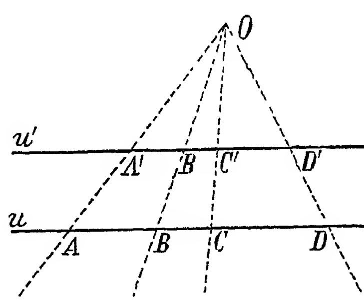
Analogamente si dica per due fasci propri U, U' Dunque:

In un piano, due forme di 1.ª specie proprie proiettive possono, col movimento di una di esse, porsi in posizione prospettiva.

Notando che nel movimento non vengono alterate le relazioni metriche fra i segmenti e gli angoli corrispondenti di due forme di 1.ª specie proiettive, applichiamo l'enunciato principio al caso di due punteggiate proiettive (proprie) u, u', in cui si corrispondono i punti all'infinito. Moviamo dunque u' portandola ad essere parallela ad u; allora le u, u' divengono prospettive, sezioni parallele d'uno stesso fascio di raggi, perciò si vede che in esse *il rapporto di due segmenti finiti corrispondenti è costante* (nella figura, dove $O \equiv AA' \cdot BB'$ è un punto proprio, si ha,

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BO}{B'O} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CO}{C'O} = \frac{CD}{C'D'};$$

se O fosse improprio risulterebbe $AB \equiv A'B'$, ecc. .). Per la nominata proprietà le u, u' si dicono *simili*.



Viceversa, se due punteggiate (proprie) sono riferite in modo, che ad ogni segmento finito dell'una corrisponda un segmento finito nell'altra, che stia col primo in un dato rapporto, cioè se due punteggiate sono simili, i punti all'infinito di esse si corrispondono e, portando l'una parallela all'altra, le due punteggiate divengono prospettive.

Si ha dunque il teorema:

Due punteggiate proiettive proprie, in cui si corrispondono i punti all'infinito, sono simili; e viceversa se due punteggiate sono simili, esse sono proiettive coi punti all'infinito corrispondenti.

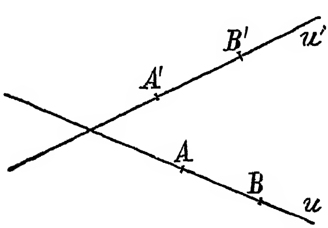
Segue di qui che la similitudine fra due punteggiate (proprie) riesce determinata da due coppie di punti omologhi, date ad arbitrio

Due fasci impropri proiettivi di raggi (in piani propri) si dicono *simili*, se sono simili le punteggiate proiettive loro sezioni

Due fasci impropri proiettivi d' un piano proprio sono simili, se hanno il raggio all' infinito unito, cioè se sono prospettivi, e viceversa.

Un caso particolare della similitudine fra due punteggiate (o due fasci impropri) è *l' uguaglianza* o *congruenza*, che si ha quando i segmenti finiti (o le distanze fra le coppie di rette parallele) corrispondenti sono uguali.

Riferendoci a due punteggiate congruenti, si può sempre muovere una delle due punteggiate, sovrapponendola all' altra, in guisa che coincidano tutti i punti corrispondenti: se infatti si muove l' una di esse u', portando due suoi punti propri A', B' sui corrispondenti A, B di u, resterà determinata su u la proiettività identica, perchè A, B e il punto all' infinito risulteranno uniti. Il risultato analogo vale per i fasci impropri uguali.



Due fasci propri di raggi diconsi *uguali* o *congruenti* se sono riferiti in modo che ad un angolo dell' uno corrisponda un angolo uguale dell' altro. Allora i raggi corrispondenti possono sovrapporsi col movimento (generatore della congruenza) che sovrappone due angoli uguali corrispondenti dei due fasci; perciò la congruenza fra due fasci è una proiettività.

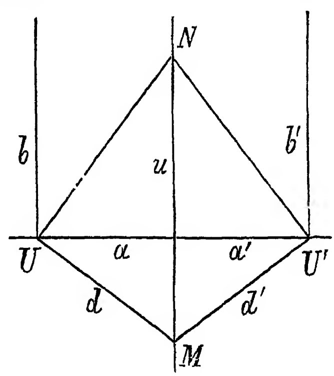
Si ha il teorema:

Dati due fasci (propri) di raggi, e fissati in essi rispettivamente i raggi a, a', si possono porre tra i fasci

stessi *due congruenze in cui* a, a′ *si corrispondono;* infatti vi sono due modi di sovrapporre col movimento il primo fascio al secondo, in guisa che a venga a coincidere con a', l'un modo differendo dall'altro per un ribaltamento intorno ad a'. Resta poi determinata *una* congruenza tra i due fasci, se ad un altro raggio b del primo, che non sia ortogonale ad a, si fa corrispondere nel secondo un raggio b, tale che $a'b' = ab$

Due fasci di raggi proiettivi propri sono congruenti, se a due coppie di raggi ortogonali ab, cd *dell'uno, corrispondono due coppie di raggi ortogonali* a′b′, c′d′ *dell'altro.*

Per dimostrarlo si pongano col movimento i due fasci in posizione prospettiva col raggio unito $a \equiv a'$ e sieno U, U' i due centri (distinti) di essi, e si supponga dapprima che l'asse di prospettività u sia proprio. Questo asse sarà parallelo ai raggi b, b', ossia ortogonale ad a. Se un suo segmento viene proiettato ugualmente secondo un angolo retto da U, U', la u è equidistante da b, b', poichè il diametro MN del cerchio $MNUU'$, essendo perpendicolare alla corda UU', la divide per metà. Segue da ciò che (nel detto caso) ad ogni angolo compreso fra due raggi di U corrisponde un angolo uguale formato dai raggi corrispondenti del fascio U'.



Se poi l'asse di prospettività u è la retta impropria, due angoli corrispondenti in U, U' hanno i lati paralleli, e però sono uguali, *c. d d.*

Due punteggiate improprie che si pensino riferite come sezioni di due fasci propri di raggi, congruenti, si diranno pure *congruenti* o *uguali.* Esse vengono proiettate da due punti propri qualunque, secondo fasci congruenti.

Due punteggiate improprie congruenti possono sovrapporsi facendo coincidere i punti omologhi, sovrapponendo col movimento un piano proprio contenente l' una ad un piano proprio contenente l' altra.

Osservazione. Anche pei fasci propri di piani e pei fasci di raggi del piano improprio si può stabilire la nozione di congruenza che da luogo a teoremi analoghi a quelli posti innanzi.

§ 30. **Forme proiettive sovrapposte.** — In ciò che precede è stata esclusa la considerazione di forme (punteggiate o fasci di raggi) sovrapposte. Per tali forme la costruzione della proiettività si riconduce ai casi precedenti (§ 28) osservando che

Nel piano

proiettando due punteggiate proiettive sovrapposte u, u' rispettivamente da due punti (distinti) S, S', posti fuori del loro comune sostegno, si ottengono due fasci di raggi proiettivi (distinti)

In particolare se sulla u ($\equiv u'$) esiste un punto unito $A \equiv A'$ si possono prendere S, S' sopra una retta per A (fuori di u): allora i due fasci proiettanti risultano prospettivi, cioè le u, u' sono prospettive alla u'' sezione comune dei due fasci.

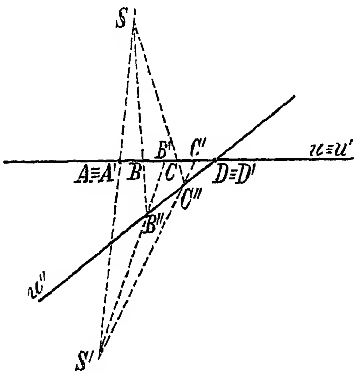
Un ulteriore punto unito u su, oltre A, deve apparte-

segando due fasci di raggi proiettivi sovrapposti (cioè concentrici) rispettivamente con due rette (distinte) s, s', non appartenenti al loro comune centro, si ottengono due punteggiate proiettive (distinte)

In particolare se in U ($\equiv U'$) esiste una retta unita $a \equiv a'$ si possono prendere s, s' per un punto di a (fuori del centro U); allora le due punteggiate risultano prospettive, cioè i fasci U, U' sono prospettivi al fascio U'' proiezione comune delle due punteggiate.

Un ulteriore raggio unito di U, oltre a, deve appar-

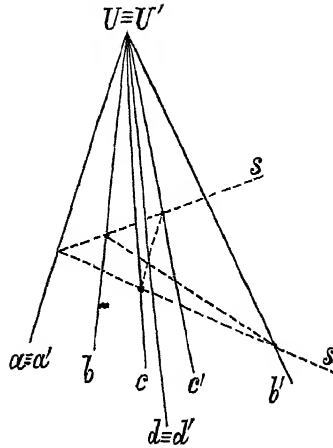
nere ad u'' ed essere quindi il punto $D \doteq D'$ sezione di u, u''; viceversa questo punto



$D \doteq u u''$ risulta unito per la data proiettività tra u, u', onde questa, avendo già un punto unito A, ammette generalmente un *secondo punto unito* D, che però eventualmente può concidere con A.

Se sulla $u \doteq u'$ sono dati i due punti uniti $A \doteq A'$, $D \doteq D'$ e la coppia di punti omologhi $B\ B'$, la proiettività si può costruire presi S, S' come nel caso generale, sopra una retta per A. Basta infatti determinare la retta u'' col congiungere il punto D ed il punto d'inter-

tenere ad U'' ed essere quindi il raggio $d - d'$ comune ad U, U''; viceversa



questo raggio $d \equiv U U''$ risulta unito per la data proiettività tra U, U', onde questa, avendo già un raggio unito a, ammette generalmente un *secondo raggio unito* d, che però eventualmente potrà coincidere con a

Se in U, U' sono dati i due raggi uniti $a \equiv a'$, $d = d'$ e la coppia di raggi omologhi $b\ b'$, la proiettività si può costruire prese le s, s', come nel caso generale, passanti per un punto di a. Basta invero determinare il punto U'' col segare la retta d colla congiungente i punti

sezione dei raggi SB. $S'B'$, giacchè così risulta fissata la prospettività tra i fasci di centro S, S' e quindi la proiettività su u.

La costruzione indicata vale anche se si vuole che il 2º punto unito D coincida con A, giacchè la condizione perchè questo accada è che l' asse di prospettività u'' passi per $A \equiv D$, ed allora esso risulta determinato come congiungente di A col punto $SB \cdot S'B'$.

Si ottiene così sulla u una proiettività avente i due punti uniti coincidenti in A ed una data coppia di punti omologhi BB', e questa proiettività risulta così determinata, perchè è determinata la prospettività tra i fasci proiezioni di u dai centri S, S'.

sb, $s'b'$, perchè risulti fissata la prospettività tra le due punteggiate s, s' e quindi la proiettività in U

La costruzione indicata vale anche se si vuole che il 2.º raggio unito d coincida con a, giacchè la condizione perchè questo avvenga è che il centro di prospettività U'' giaccia su $a \equiv d$, ed allora esso risulta determinato come sezione di a col raggio $sb \cdot s'b'$.

Si ottiene così in U una proiettività avente i due raggi uniti coincidenti con a ed una data coppia di raggi omologhi $b\,b'$, e questa proiettività risulta così determinata perchè è determinata la prospettività tra le punteggiate sezioni di U con s, s'.

Gli ultimi risultati ottenuti (che si estendono per dualità anche al fascio di piani) permettono di affermare che:

In una forma di 1.ª specie vi è una proiettività determinata $\begin{pmatrix} \mathrm{A\,D\,B} \\ \mathrm{A\,D\,B'} \end{pmatrix}$, *avente due dati elementi uniti* A, D, *distinti o coincidenti, e dove si corrispondono due altri elementi assegnati* B, B'.

Questo enunciato racchiude in parte un corollario del teorema fondamentale (del § 21), ma dà qualche cosa di

nuovo, pel caso in cui i due elementi, che vengono assegnati come elementi uniti della proiettività, coincidono in uno solo.

§ 31. **Elementi uniti di una proiettività tra forme di 1.ª specie sovrapposte.** — Abbiamo veduto come in una forma di 1.ª specie u si possa costruire una proiettività. dati due elementi uniti, distinti o coincidenti, ed una coppia di elementi omologhi: se anche questa coppia di elementi omologhi è costituita da elementi coincidenti, la proiettività è identica.

Si hanno pure esempi di proiettività, in una forma di 1.ª specie u, prive di elementi uniti. Basta per esempio pensare alla proiettività che nasce sulla u tra i coniugati armonici di uno stesso elemento rispetto a due coppie AB, CD che si separano. Invero questa proiettivita (che e stata considerata nel § 20 nella opposta ipotesi che le AB. CD non si separassero) è certo priva di elementi uniti, perchè un elemento unito di essa. insieme al suo coniugato armonico comune rispetto ad AB, CD, fornirebbe una coppia separante armonicamente le date AB, CD, il che è assurdo se queste si separano (l. c.).

Riassumiamo le cose dette nel seguente enunciato:

Data in una forma di 1.ª specie una proiettività non identica, sono possibili tre casi:

1.° esistono due elementi uniti (distinti); allora la proiettività dicesi *iperbolica*:

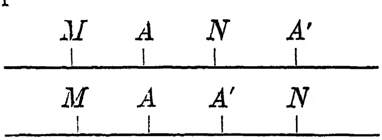
2.° esiste un elemento unito (ovvero due coincidenti); allora la proiettività dicesi *parabolica;*

3.° non esiste alcun elemento unito; allora la proiettività dicesi *ellittica.*

Abbiamo visto (§ 20) che la proiettività fra due forme di 1.ª specie è una corrispondenza ordinata, vale a dire che, mentre un elemento si muove descrivendo una forma, il corrispondente si muove descrivendo l' altra.

Trattandosi di forme di 1.ª specie sovrapposte, il movimento di due elementi corrispondenti potrà avvenire nello stesso senso o in senso opposto, la proiettività è *concorde* nel 1.° caso. *discorde* nel 2 ° (§ 19).

Se in una forma di 1.ª specie si ha una proiettività discorde, un elemento che si muove descrivendo la forma incontra due volte il corrispondente Questo fatto di natura intuitiva si può dedurre dal postulato della continuità, come nel § 19. Ora data in una forma di 1.ª specie una proiettività parabolica o ellittica, si potrà dire che essa deve essere concorde, che dall'ipotesi opposta seguirebbe l'esistenza di due elementi uniti (distinti), ossia seguirebbe che la proiettività è iperbolica. Non si può dire però, viceversa, che una proiettività iperbolica debba essere discorde. Per convincersene basta fare la seguente osservazione: Si prenda una retta u e su di essa quattro punti M, N, A, A'. Esiste una proiettività su u dove M, N sono uniti e ad A corrisponde A'.



Ora, mentre un punto descrive il seguente ordinato $\overline{MAN}$ il corrispondente in questa proiettività descrive il seguente $\overline{MA'N}$; questo ha senso opposto a $\overline{MAN}$ se A, A' separano M, N, e però in tal caso la proiettività posta su u è discorde, al contrario se A, A' non separano M, N, i segmenti $\overline{MAN}$ ed $\overline{MA'N}$ hanno lo stesso senso, e la proiettività è concorde. Si vede anche che nel 1.° caso sempre una coppia di elementi omologhi separa M, N, nel 2.° mai. (§ 19)

Si possono riassumere le cose dette enunciando il teorema:

In una forma di 1.ª specie.

1.° ogni proiettività discorde è iperbolica;

2.° ogni proiettività parabolica od ellittica è concorde;

3.° *una proiettività iperbolica è discorde o concorde, secondochè due elementi omologhi in essa separano o no gli elementi uniti* (il che avviene ugualmente per tutte le coppie di elementi omologhi).

Osservazione — Si noti che il prodotto di due proiettività in una forma di 1.ª specie è concorde o discorde, secondochè queste sono ambedue concordi o discordi, oppure l'una concorde e l'altra discorde.

§ 32 * **Congruenza diretta e inversa tra punteggiate sovrapposte e fasci proprî di un piano.** — Una *similitudine* (§ 29) sopra una retta propria si dice *diretta* o *inversa*, secondochè è concorde o discorde. Una similitudine sulla retta ha sempre il punto all'infinito come punto unito e però è iperbolica o parabolica, in questo ultimo caso è certo diretta. dico che essa è allora una *uguaglianza* o *congruenza diretta* Per dimostrarlo basta notare che uno strisciamento della retta su sè stessa, che

porti un punto A in un dato punto A', genera effettivamente una congruenza diretta, cioè una proiettività parabolica che non ha altro punto unito che il punto all'infinito (perchè nessun altro punto resta fermo), d'altra parte vi è sulla retta una sola proiettività parabolica, che ha il punto all'infinito come punto unito e che fa corrispondere ad A, A'; dunque la similitudine parabolica supposta data sulla nostra retta equivale proprio alla congruenza diretta generata dallo strisciamento nominato.

Si può quindi affermare:

Una congruenza diretta, sopra una retta propria, si può definire come una proiettività parabolica col punto unito all'infinito

Osservazione. — In conseguenza il postulato metrico del movimento della retta su sè stessa appare come un corollario del teorema fondamentale della proiettività.

In una congruenza inversa, sopra una retta, vi sono due punti uniti uno dei quali è il punto improprio e l'altro un punto proprio O Ora due punti omologhi dovranno distare ugualmente da O, e (stante il senso discorde della corrispondenza) cadere da parte opposta di O. Per conseguenza

Una congruenza inversa, sopra una retta propria, equivale ad una simmetria rispetto al punto unito proprio.

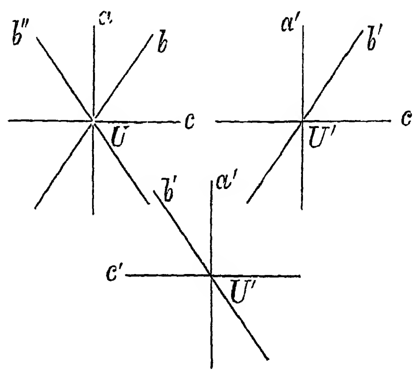
Osservazione. — La congruenza diretta su una punteggiata si genera col movimento della retta su sè stessa, capace di sovrapporre due punti corrispondenti. La congruenza inversa si genera invece con un ribaltamento della retta attorno al punto unito proprio.

Anche per le punteggiate improprie, sovrapposte, vi è luogo a distinguere una *congruenza diretta* (concorde) ed una *congruenza inversa* (discorde). Tenendo presente il significato intuitivo della disposizione circolare naturale di una retta impropria (§ 6), possiamo dire che un movimento di un piano su sè stesso (strisciamento) non altera il senso di una terna di direzioni, e perciò genera sulla retta all'infinito una congruenza diretta; un ribaltamento del piano attorno ad una retta (propria) genera sulla retta impropria una congruenza inversa.

La considerazione della congruenza, determinata sulla retta all'infinito da due fasci propri congruenti di un piano, permette di distinguere la *congruenza diretta ed inversa di due fasci propri giacenti in un piano.*

Sieno dati in un piano due fasci (propri) congruenti u, u', e sieno ab, $a'b'$ due angoli corrispondenti (uguali) non ortogonali, mercè i quali la congruenza stessa risulta determinata (§ 29). Moviamo nel piano il fascio U' sovrapponendolo ad U, in guisa che a' coincida con a; questo movimento riesce così definito (a meno di rotazioni di due angoli retti, da cui si può prescindere). Esso porta b' a coincidere con b, oppure ad assumere la posizione b'' simmetrica di b rispetto ad a.

Nel primo caso, considerando, p. e., il raggio c di U ortogonale ad a, si vede che la terna di direzioni abc ha lo stesso senso della terna di direzioni $a'b'c'$, costituita dai raggi omologhi del fascio U', vale a dire la congruenza tra U, U' è diretta, invece nel secondo caso le dette terne hanno senso opposto, ossia la congruenza tra U, U' è inversa. Ora si vede ancora che nel



primo caso la nominata congruenza viene generata dal movimento effettuato *nel piano* che sovrappone U' ad U portando a' su a, nel secondo caso occorre eseguire, dopo questo movimento, anche un ribaltamento del piano attorno ad a.

Tanto che si può concludere.

Due fasci (propri) congruenti di un piano sono congruenti direttamente o inversamente, secondochè i raggi omologhi di essi possono farsi coincidere solo con un movimento del piano su sè stesso, o con un tale movimento congiunto ad un ribaltamento del piano.

Abbiamo veduto (§ 29) che, dati due fasci propri di raggi e fissata una coppia di raggi corrispondenti, restano determinate tra i fasci stessi *due* congruenze; ora si può anche aggiungere che, se i fasci stanno in un piano, *una delle nominate congruenze è diretta e l'altra inversa.*

Osservazione. — Se due fasci di raggi congruenti, di un piano, sono prospettivi, essi risultano riferiti per parallelismo di elementi, allorchè la congruenza è diretta; oppure sono proiezioni della retta che biseca ortogonalmente il segmento congiungente i centri dei fasci, allorchè la congruenza è inversa.

Come caso particolare della congruenza tra due fasci di raggi di un piano, si ha la congruenza tra due fasci di raggi sovrapposti, ossia in un fascio. Qui non occorre più la considerazione della retta impropria, per stabilire la distinzione fra congruenza diretta ed inversa.

Una congruenza diretta in un fascio (proprio) di raggi equivale ad una rotazione, di un certo angolo, del fascio su sè stesso. infatti essa può venir generata dalla rotazione che sovrappone un raggio al corrispondente. Segue di qui che *una tale congruenza è sempre ellittica.*

In una congruenza inversa, certo iperbolica, gli angoli formati dai raggi omologhi con un raggio unito debbono essere uguali, e da parte opposta di esso (appunto perchè il senso della corrispondenza è discorde) Si deduce che:

Una congruenza inversa, in un fascio proprio di raggi, può essere generata col ribaltamento del piano del fascio attorno a ciascuno dei raggi uniti, ossia equivale ad una simmetria rispetto a ciascun raggio unito.

Segue che:

La congruenza inversa ammette due raggi uniti ortogonali, bisettori degli angoli delle rette corrispondenti.

Le proposizioni precedenti possono ora riportarsi, per sezione, alla retta impropria del piano del fascio considerato. Si avrà dunque:

Sopra una retta impropria, ogni congruenza diretta è ellittica; ogni congruenza inversa possiede due punti uniti, corrispondenti a direzioni ortogonali

Due punti di una retta impropria (presi in un certo ordine) *si corrispondono in due congruenze su questa retta, l'una diretta e l'altra inversa.*

Osservazione. — Anche per due fasci di piani sovrapposti, cioè in un fascio di piani, si può distinguere la

congruenza diretta (concorde) dalla congruenza inversa (discorde). La prima viene generata da una rotazione del fascio (attorno al suo asse) di un certo diedro. La seconda equivale ad una simmetria rispetto a due piani, uniti, ortogonali.

Per fasci di piani distinti, sieno pure ambedue in una stella, non vi è luogo a distinguere due specie di congruenza· diretta e inversa.

§ 33 **Gruppi di quattro elementi proiettivi.** — Per indicare che due forme di 1.ª specie u, u' sono proiettive, useremo del simbolo Π, scrivendo

$$u \,\Pi\, u'.$$

Se è

$$u \,\Pi\, u' \text{ e } u' \,\Pi\, u''$$

(dove u, u', u'' sono forme di 1.ª specie), si deduce (§ 21)

$$u \,\Pi\, u''.$$

Se $A\,B\,C\,D\,E$...... è un gruppo di elementi di una forma di 1.ª specie u, ed $A'\,B'\,C'\,D'\,E'$...... è un gruppo di elementi di un'altra forma di 1.ª specie u', si dirà che i due *gruppi* sono *proiettivi*, e si scriverà:

$$ABCDE.....\ \Pi\ A'B'C'D'E'.....\,,$$

quando esiste una proiettività tra u, u' in cui le coppie di elementi

$$AA',\ BB',\ CC',\ DD',\ EE'.\ ....,$$

si corrispondono. Allora si ha di conseguenza:

$$\begin{array}{c} A\,B\,C\,D\ \Pi\ A'\,B'\,C'\,D' \\ A\,B\,C\,E\ \Pi\ A'\,B'\,C'\,E' \\ B\,C\,D\,E\ \Pi\ B'\,C'\,D'\,E' \\ \dots\dots\dots\dots\dots, \end{array}$$

od anche

$$D\,C\,B\,A\ \Pi\ D'\,C'\,B'\,A' \text{ ecc.}$$

Per il § 21 due gruppi di tre elementi ABC, $A'B'C'$ in forme di 1^{a} specie u, u', sono sempre proiettivi, cioè si ha sempre

$$ABC \;\Pi\; A'B'C'.$$

Invece la relazione $ABCD \;\Pi\; A'B'C'D'$ (dove D, D' sono altri due elementi rispettivamente di u, u') non è in generale soddisfatta, se i gruppi di elementi $ABCD$, $A'B'C'D'$. sono stati presi ad arbitrio: anzi quella relazione determina D' dato D, se sono fissate le due terne ABC. $A'B'C'$ (§ 21).

Segue pure che se E, E' sono altri elementi rispettivamente in u, u', dalle relazioni

$$ABCD \;\Pi\; A'B'C'D'$$
$$ABCE \;\Pi\; A'B'C'E',$$

si trae

$$ABCDE \;\Pi\; A'B'C'D'E',$$

e quindi

$$BCDE \;\Pi\; B'C'D'E' \text{ ecc.}$$

I precedenti enunciati sono espressioni simboliche dei teoremi stabiliti.

Teorema. — *Tutti i gruppi armonici di elementi appartenenti a forme di 1^{a} specie sono proiettivi.*

Infatti se $(ABCD)$, $(A'B'C'D')$ sono due gruppi armonici di elementi, appartenenti rispettivamente a due forme di 1.^{a} specie u, u' (distinte o sovrapposte), la proiettività definita dalle terne ABC, $A'B'C'$, fa corrispondere i quarti armonici D, D' (per definizione)

Corollario. — *Se* (ABCD) *è un gruppo armonico di elementi d' una forma di 1.^{a} specie, si ha:*

$$ABCD \;\Pi\; BADC \;\Pi\; CDAB \;\Pi\; DCBA$$
$$\Pi\; BACD \;\Pi\; ABDC \;\Pi\; CDBA \;\Pi\; DCAB.$$

Infatti (§ 13) tutti i gruppi di quattro elementi sopra indicati sono armonici, se è armonico $(ABCD)$.

La relazione precedente si può enunciare in parole. dicendo che un gruppo armonico di quattro elementi di una forma di 1.ª specie, disposti in un certo ordine, è proiettivo ai gruppi ottenuti:

a) scambiando tra loro due elementi del gruppo ed insieme gli altri due

b) scambiando tra loro due elementi coniugati e non gli altri due.

Mediante uno scambio *a*) si passa dall'uno all'altro dei quattro gruppi scritti nella prima linea o dall'uno all'altro dei gruppi scritti nella seconda linea; invece mediante uno scambio *b*) si passa da un gruppo della 1.ª linea a un gruppo della 2.ª linea, e viceversa.

Siamo ora indotti a ricercare se sia possibile effettuare gli scambi *a*) o *b*) sopra i quattro elementi di un gruppo non armonico in una forma di 1.ª specie, in modo che esso rimanga proiettivo al gruppo stesso preso secondo il primitivo ordine.

Vedremo che è sempre possibile effettuare in un gruppo di quattro elementi di una forma di 1.ª specie un tale scambio *a)*, ma che dalla possibilità di effettuare uno scambio *b)* in modo che il gruppo di quattro elementi nel nuovo ordine sia proiettivo al primo, segue che il gruppo stesso è armonico.

Cominciamo dal dimostrare che se A, B, C, D sono quattro elementi (arbitrari) d'una forma di 1.ª specie, si ha sempre

$$ABCD \;\Pi\; BADC.$$

Basta stabilire il teorema per il gruppo $ABCD$ di quattro punti di una retta; si farà poi uso della legge di dualità nello spazio o nel piano.

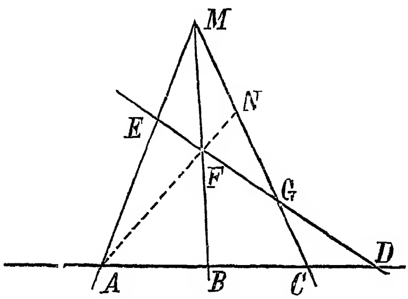
A tal fine si proietti il gruppo $ABCD$ in $EFGD$, sopra un'altra retta per D, da un punto esterno M; si determini quindi il punto N intersezione di AF, MC;

si ha allora

$$ABCD \sqcap EFGD$$

(essendo un gruppo proiezione dell'altro da M). Si ha pure

$$EFGD \sqcap MNGC$$



(essendo un gruppo proiezione dell'altro da A), ed

$$MNGC \sqcap BADC$$

(essendo un gruppo proiezione dell'altro da F): quindi

$$ABCD \sqcap BADC, \textit{c.d d.}$$

Applicando questo risultato al gruppo $ACBD$, si avrà:

$$A\,C\,B\,D \sqcap C\,A\,D\,B$$

cioè esiste una proiettività nella quale le coppie AC, CA, BD, DB, si corrispondono. Questa proiettività fa corrispondere al gruppo $ABCD$ il gruppo $CDAB$, sicchè

$$A\,B\,C\,D \sqcap C\,D\,A\,B.$$

Ma per quanto precede

$$C\,D\,A\,B \sqcap D\,C\,B\,A;$$

si avranno dunque le relazioni

$$A\,B\,C\,D \sqcap B\,A\,D\,C \sqcap C\,D\,A\,B \sqcap D\,C\,B\,A.$$

Supponiamo ora che sia

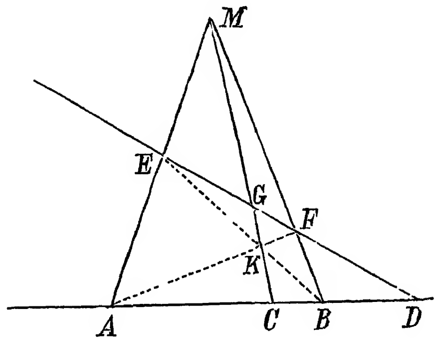
$$A\,B\,C\,D \sqcap B\,A\,C\,D,$$

e, come innanzi, si consideri il gruppo $EFGD$, proiezione di $A\,B\,C\,D$ sopra un' altra retta per D, da un punto esterno M. Si ha ora:

$$BACD \sqcap EFGD,$$

e la proiettività tra le rispettive punteggiate che fa passare dall'uno all'altro gruppo, ammette il punto unito D e però è una prospettività (§ 27), in conseguenza le rette BE,

AF, CG concorrono in un punto K. L'esistenza del quadrangolo $ELFK$ di cui i lati EM, KF passano per A, i lati FK, MF per B, MK per C ed EF per D, prova quindi che $ABCD$ è un gruppo armonico



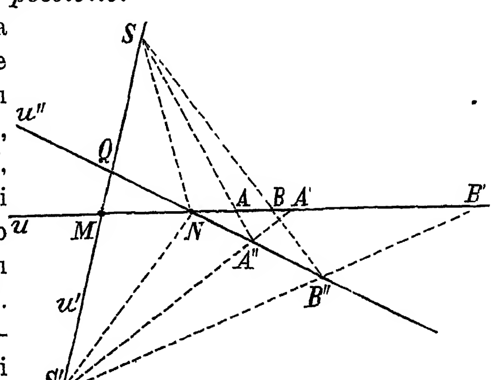
Possiamo ora enunciare complessivamente per le forme di 1.ª specie il

Teorema. — *Un qualunque gruppo di quattro elementi* ABCD *di una forma di 1.ª specie, ordinati in un dato modo, è proiettivo ai gruppi ottenuti scambiando fra loro due elementi di esso ed insieme gli altri due, cioè:*

$$\text{ABCD} \;\Pi\; \text{BADC} \;\Pi\; \text{CDAB} \;\Pi\; \text{DCBA}.$$

Se il gruppo è proiettivo ad uno di quelli ottenuti scambiando tra loro soltanto due elementi e non gli altri due (per esempio ABCD Π BACD), *esso è armonico, ed i due elementi scambiabili sono in esso coniugati. Viceversa,* abbiam visto che *pei gruppi armonici un tale scambio è sempre possibile.*

Sopra una retta u si abbiano due gruppi proiettivi di quattro punti, $MNAB$, $MNA'B'$, aventi due punti uniti; dico che sono proiettivi i gruppi $MNAA'$, $MNBB'$. Per vederlo si proiettino i gruppi



(omologhi) $MNAB$, $MNA'B'$ delle rette proiettive sovrapposte u, u', rispettivamente da due punti esterni S, S', allineati con M I fasci Su, $S'u'$ aventi il raggio unito SS' risultano prospettivi (§ 27, 30), e perciò le rette SA, $S'A'$ ed SB, $S'B'$ determinano due punti A'', B'' di cui la congiungente u'' (sezione comune dei due fasci prospettivi) passa per N. Sia $Q \equiv u'' . SS'$ il punto comune alla retta u'' e alla SS'. Allora si ha

$$MNAA' \,\Pi\, MQSS'$$

(essendo un gruppo proiezione dell'altro da A''),

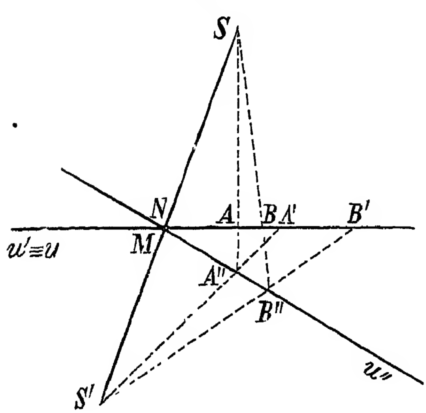
$$MNBB' \,\Pi\, MQSS'$$

(essendo un gruppo proiezione dell'altro da B''),

quindi $$MNAA' \,\Pi\, MNBB', \ c. d. d.$$

Il precedente risultato si può enunciare dicendo che · se si ha sulla retta u una proiettività avente due punti uniti distinti M, N, di cui le AA', BB' sieno due coppie di punti omologhi, la proiettività $\begin{pmatrix} MNA \\ MNA' \end{pmatrix}$ definita dalle due terne MNA, MNA', fa passare da B a B'.

Sotto questa forma il risultato può estendersi al caso in cui M, N coincidono, ossia $N \equiv M$ In tale ipotesi abbiamo visto che la prospettività tra i fasci di centri S, S' risulta fissata, data una coppia di punti omologhi A, A' (oltre il punto unito $M \equiv N$), per il fatto che l'asse di prospettivita u'' deve passare per M (onde esso congiunge M ed $A'' \equiv SA . S'A'$). Ancora, se B, B' sono punti omologhi della data proiettività $\begin{pmatrix} MMA \\ MMA' \end{pmatrix}$,



si può costruire su u *una* proiettività avente due punti uniti coincidenti in M, ed A, B come punti omologhi: questa si può ottenere (analogamente al caso generale in cui M, N sono distinti) proiettando u da A'' su SS', e quindi S, S' su u' ($\equiv u''$) da $B'' \equiv SB \cdot S'B'$; perciò in essa si corrispondono A', B'.

L'affermazione che tale proiettività ha i due punti uniti coincidenti in M, risulta provata dal fatto che la condizione necessaria e sufficiente affinchè l'indicata costruzione conduca da un punto di u a sè stesso, è che la sua proiezione da A'' su SS' sia allineata con A'', B'' (cioè stia su u'')

Estendendo il significato del simbolo Π, diremo che e $MMAB \, \Pi \, MMA'B'$, quando la proiettività di u avente due punti uniti coincidenti in M e nella quale ad A corrisponde A', fa corrispondere a B, B': allora il risultato stabilito pel caso $M \equiv N$ può enunciarsi dicendo che se

$$M\,M\,A\,B \;\Pi\; M\,M\,A'\,B',$$

si deduce

$$M\,M\,A\,A' \;\Pi\; M\,M\,B\,B'.$$

L'estensione del significato del simbolo Π si farà analogamente per le altre forme di 1.ª specie.

Ciò posto (riunendo insieme i due casi in cui M e distinto da N ed $M \equiv N$) possiamo enunciare complessivamente per le forme di 1.ª specie il

Teorema. — *Se in una forma di 1.ª specie si hanno due gruppi di (4 o 3) elementi* MNAB, MNA'B', *aventi due elementi comuni* M, N, *distinti o coincidenti, e tali che sia*

$$\mathrm{MNAB} \;\Pi\; \mathrm{MNA'B'},$$

si deduce

$$\mathrm{MNAA'} \;\Pi\; \mathrm{MNBB'}.$$

§ 34.* **Birapporto di quattro elementi in una forma di 1.ª specie.** — La relazione simbolica

$$ABCD \;\Pi\; A'B'C'D',$$

tra due quaderne di elementi appartenenti a forme di 1.ª specie, si può sostituire con una relazione di uguaglianza tra due numeri Per ottenere questo resultato bisogna mostrare come ad ogni gruppo di quattro elementi di una forma di 1.ª specie appartenga un (*invariante assoluto* cioè un) numero che si conserva, allorchè sul gruppo stesso (e sulla forma che lo contiene) si operi una proiettività: si vedrà quindi come l'uguaglianza dei numeri relativi a due quaderne di elementi dia la condizione, non solo necessaria, ma anche sufficiente perchè esse sieno proiettive.

Il numero che vogliamo definire per ogni gruppo di quattro elementi di una forma di 1.ª specie, è il *birapporto* (o *rapporto anarmonico*) di essi. Per dimostrare il suo carattere di invarianza relativo alle proiettività, basterà dimostrare che esso si conserva per ogni proiezione o sezione, giacche sappiamo ormai che la proiettività tra due forme di 1.ª specie può sempre esser posta mediante un numero finito di proiezioni e sezioni

Cominciamo a definire il birapporto di quattro punti propri A, B, C, D, dati sopra una retta Prenderemo come espressione di esso

$$(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD},$$

dove con AC, BC, AD, BD, denotiamo in valore ed in segno le lunghezze dei segmenti (finiti) aventi gli estremi indicati; il segno, naturalmente, è relativo ad un *senso* della retta fissato come *positivo*, ma l'espressione del birapporto $(ABCD)$ è tale, che esso non muta se si scambia il senso positivo della retta col negativo.

Definiremo invece come birapporto di quattro rette a, b, c, d di un fascio proprio, l'espressione

$$(a\ b\ c\ d) = \frac{\operatorname{sen} a c}{\operatorname{sen} b c} : \frac{\operatorname{sen} a d}{\operatorname{sen} b d}$$

formata coi seni degli angoli delle nominate rette, intendendo che i detti angoli vengano presi in grandezza ed in segno relativamente ad un senso del fascio, fissato come positivo (senso che può essere indifferentemente invertito); veramente la grandezza di ognuno di questi angoli non è determinata, poichè, anche limitandosi ad angoli minori di due retti, due rette danno luogo a due angoli supplementari, ma questa indeterminazione è qui senza conseguenza, poichè due angoli supplementari hanno lo stesso seno, il birapporto $(a\ b\ c\ d)$ e dunque ben definito.

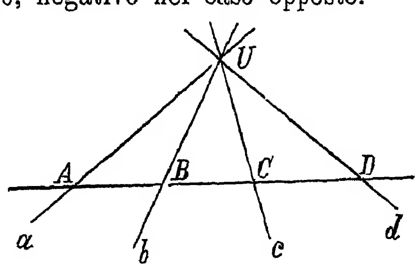
Analogamente si definisce il birapporto

$$(\alpha\ \beta\ \gamma\ \delta) = \frac{\operatorname{sen} \alpha \gamma}{\operatorname{sen} \beta \gamma} : \frac{\operatorname{sen} \alpha \delta}{\operatorname{sen} \beta \delta}$$

di 4 piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ di un fascio proprio, considerando gli angoli diedri $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$, $\alpha\delta$, $\beta\delta$. Si può dire che il birapporto $(\alpha\beta\gamma\delta)$ e per definizione il birapporto della quaderna di raggi ottenuta segando il fascio di piani con un piano normale all'asse.

Osservazione. — Il birapporto $(ABCD)$ di 4 elementi in una forma di 1.ª specie dipende dalla disposizione in cui essi vengono considerati. Esso è positivo se le coppie AB, CD non si separano, negativo nel caso opposto.

Consideriamo ora una quaderna di raggi d'un fascio (proprio) a, b, c, d, e una quaderna di punti (propri) A, B, C, D, ottenuta segando il fascio con una retta. De-



notando con U il centro del fascio, avremo che le aree dei triangoli UAC, UBC, UAD, UBD stanno fra loro come le basi; d'altra parte queste aree sono date dal prodotto delle lunghezze di due lati pel seno dell'angolo compreso; avremo dunque (denotando con h un fattore di proporzionalità)

$$\begin{aligned} UA \cdot UC \cdot \operatorname{sen} ac &= h \cdot AC \\ UB \cdot UC \cdot \operatorname{sen} bc &= h \cdot BC \\ UA \cdot UD \cdot \operatorname{sen} ad &= h \cdot AD \\ UB \cdot UD \cdot \operatorname{sen} cd &= h \cdot BD, \end{aligned}$$

relazioni che intendiamo di prendere soltanto in valore assoluto. Da esse si ricava

$$\frac{AC}{BC} = \frac{UA}{UB} \frac{\operatorname{sen} ac}{\operatorname{sen} bc},$$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{UA}{UB} \frac{\operatorname{sen} ad}{\operatorname{sen} cd},$$

e quindi si deduce l'uguaglianza in valore assoluto

$$(ABCD) = (abcd).$$

Osservando poi il senso dei segmenti e degli angoli che entrano in considerazione, si vede subito che tale uguaglianza vale anche rispetto al segno dei birapporti che in essa compariscono; d'altronde ciò risulta anche chiaro dal fatto che il detto segno dipende dal separarsi o no delle coppie AB, CD e ab, cd.

Concludiamo intanto che ogni proiezione da un punto (proprio) di una quaderna di punti (propri) di una retta ha lo stesso birapporto di questa quaderna di punti, e viceversa ogni sezione (propria) di una quaderna di raggi d'un fascio (proprio) ha lo stesso birapporto della quaderna di raggi.

Si considerino ora quattro piani di un fascio proprio α, β, γ, δ, e due gruppi di punti (propri) $ABCD$,

$A' B' C' D'$, ottenuti segando il fascio di piani con due rette sghembe. Supposto p. e. che la retta $A D'$ non sia parallela ad alcuno dei piani β e γ, indichiamo con B'', C'' i punti propri in cui essa li sega; allora i gruppi $A B C D$, $A B'' C'' D'$, e così $A B'' C'' D'$, $A' B' C' D'$ sono prospettivi, come sezioni di uno stesso fascio di raggi col centro sull'asse del fascio di piani, e però si ha

$$(A B C D) = (A B'' C'' D') = (A' B' C' D').$$

Il birapporto di 4 punti (propri) sezioni di $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, con una retta è dunque costante; e costante ed uguale al primo è quindi anche il birapporto di 4 raggi sezioni del fascio di piani con un piano non parallelo all'asse, onde (segando con un piano normale all'asse) risulta

$$(A B C D) = (\alpha \beta \gamma \delta).$$

Pertanto resta stabilito che: due gruppi di 4 elementi appartenenti a forme di 1.ª specie, i quali sieno ottenuti l'uno dall'altro con una proiezione o sezione, hanno lo stesso birapporto. Ma questa conclusione è, per ora, subordinata all'ipotesi che gli elementi e la forma di cui si discorre sieno tutti propri, giacchè in questa ipotesi soltanto è stato definito il birapporto.

Procediamo a togliere questa restrizione, definendo convenientemente il birapporto nei casi fino ad ora eccepiti.

Cominciamo dal considerare sopra una retta propria tre punti propri A, B, C, ed il punto improprio D_∞; per definizione porremo il birapporto

$$(A B C D_\infty) = \frac{A C}{B C}.$$

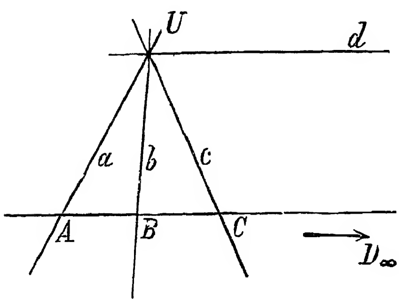
come si è tratti a farlo, notando che per una considerazione di limite

$$\frac{A D_\infty}{B D_\infty} = 1.$$

Si proietti ora il gruppo ($A\,B\,C\,D_\infty$) da un punto proprio U, secondo il gruppo di raggi a, b, c, d: dico che

$$(A\,B\,C\,D_\infty) = (a\,b\,c\,d)$$

Invero si ha (come abbiamo veduto innanzi)



$$\frac{A\,C}{B\,C} = \frac{U\,A}{U\,B} : \frac{\text{sen}\ a\,c}{\text{sen}\ b\,c};$$

ma nel triangolo UAB i lati UA, UB sono proporzionali ai seni degli angoli opposti, e questi angoli sono rispettivamente uguali (o supplementari) a bd, ad, dunque

$$\frac{A\,C}{B\,C} = \frac{\text{sen}\ b\,d}{\text{sen}\ a\,d} : \frac{\text{sen}\ a\,c}{\text{sen}\ b\,c},$$

ossia

$$(A\,B\,C\,D_\infty) = \frac{A\,C}{B\,C} = \frac{\text{sen}\ a\,c}{\text{sen}\ b\,c} : \frac{\text{sen}\ a\,d}{\text{sen}\ b\,d} = (abcd)\,,\ c.d.d.$$

Ora definiremo analogamente il birapporto di 4 punti A, B, C, D, di una retta propria, allorchè uno dei punti C, B, A sia improprio, valendoci delle formule:

$$(A\,B\,C_\infty\,D) = \frac{B\,D}{A\,D},$$

$$(A\,B_\infty\,C\,D) = \frac{A\,C}{A\,D},$$

$$(A_\infty\,B\,C\,D) = \frac{B\,D}{B\,C}.$$

e collo stesso ragionamento usato innanzi si proverà che ogni proiezione $a\ b\ c\ d$ del gruppo $A\,B\,C\,D$, fatta da un punto proprio, ha il birapporto

$$(a\ b\ c\ d) = (A\ B\ C\ D).$$

Passiamo quindi a considerare 4 punti A, B, C, D sopra una retta impropria, i 4 raggi a, b, c, d che proiettano i detti punti da un qualsiasi punto proprio U formano tra loro angoli indipendenti dalla particolare posizione di U, sicchè il birapporto $(a\ b\ c\ d)$ ha un valore costante, che può definirsi come birapporto $(A\ B\ C\ D)$.

Dato un fascio di raggi improprio, ma giacente in un piano proprio, una sua quaderna di raggi $a\ b\ c\ d$ viene segata con una retta qualsiasi, non appartenente al fascio, secondo un gruppo di punti $A\ B\ C\ D$, di cui il birapporto è costante; si assumerà per definizione il birapporto

$$(a\ b\ c\ d) = (A\ B\ C\ D).$$

Similmente 4 piani $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, di un fascio improprio vengono segati da una retta non parallela ad essi secondo 4 punti A, B, C, D, di cui il birapporto costante si assumerà come definizione del birapporto $(\alpha \beta \gamma \delta)$.

Finalmente, se sono date 4 rette improprie a, b, c, d, di un fascio, assumeremo, per definizione, come birapporto $(a b c d)$ il birapporto costante dei 4 piani proiettanti le nominate rette da un qualsiasi punto (proprio).

Abbiamo così esteso a tutti i casi la definizione del birapporto di un gruppo di 4 elementi $ABCD$ di una forma di 1.ª specie, in guisa che risulti sempre vera la proposizione « *il birapporto di 4 elementi di una forma di 1.ª specie rimane assolutamente invariato per ogni proiezione o sezione* ». Da questa proposizione si deduce, come abbiamo notato:

Se due quaderne di elementi $A\ B\ C\ D$, $A'\ B'\ C'\ D'$, appartenenti a forme di 1.ª specie, sono proiettive, sussiste l'uguaglianza dei birapporti

$$(A\ B C D) = (A' B' C' D').$$

Ora bisogna mostrare che questa uguaglianza è condizione non soltanto necessaria, ma altresì sufficiente, perchè si abbia $$A B C D \ \Pi\ A' B' C' D'.$$

Cominciamo a tal fine dall'osservare che, dati tre elementi A, B, C, di una forma di 1.ª specie, vi è un unico elemento D, pel quale il birapporto $(A\,B\,C\,D)$ assume un dato valore prestabilito.

Ciò posto si abbia $(A\ B\ C\ D) = (A'\ B'\ C'\ D')$, la proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$ posta tra le forme di 1.ª specie che contengono i nostri elementi, deve far corrispondere a D un elemento D_1, pel quale il birapporto

$$(A'B'C'D_1) = (ABCD);$$

l'elemento D_1 non differirà dunque da D', ossia

$$ABCD \;\, \Pi \;\, A'B'C'D' \qquad\qquad c.d.d.$$

Riassumendo: *La condizione necessaria e sufficiente perchè due gruppi di 4 elementi, appartenenti a forme di 1.ª specie, sieno proiettivi, è l'uguaglianza dei loro birapporti.*

Molti resultati precedentemente dati sotto altra forma trovano ora una semplice espressione coll'introduzione dei birapporti.

Così p. e. *la proprietà di un gruppo* (A B C D) *di essere armonico è espressa dalla relazione*

$$(A\ B\ C\ D) = -1,$$

come segue subito dalla proprietà metrica dei gruppi armonici data nel § 17.

Ancora la proprietà stabilita in fine del § 32 si può enunciare dicendo:

In una proiettività iperbolica il birapporto della quaderna costituita dai due elementi uniti e da due elementi corrispondenti qualsiasi è costante (indipendente cioè dalla scelta di questi due elementi corrispondenti): questo birapporto, che è ben definito appena fissata la disposizione della quaderna, dicesi *invariante assoluto* della proiettività; esso insieme ai punti uniti determina la proiettività, ecc.

Osservazione 1.ª — Abbiamo già osservato che il birapporto $(A\ B\ C\ D)$ di 4 elementi appartenenti ad una forma di 1.ª specie non è indipendente dalla disposizione in cui questi elementi vengono presi. Permutando gli elementi A, B, C, D si ottengono 6 valori del birapporto che è facile calcolare; 4 permutazioni soltanto corrispondono in generale ad un medesimo valore, cioè si ha

$$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA):$$

queste uguaglianze esprimono le relazioni di proiettività date nel § 32.

In generale

$$(A\ B\ C\ D) = \frac{1}{(A\ B\ C\ D)}$$

di guisa che l' uguaglianza

$$(A\ B\ C\ D) = (B\ A\ C\ D)$$

(esprimente la relazione $ABCD \mathrel{\Pi} BACD$) sussiste soltanto [se A e B coincidono $\{(ABCD) = +1\}$ o. dato che i 4 elementi sieno distinti] se

$$(A\ B\ C\ D) = -1$$

Questa uguaglianza per la proposizione del § 17 esprime che il gruppo $ABCD$ è armonico, e così si arriva a confermare la conclusione del § 32.

Osservazione 2.ª — Si può ora dire che la proiettività tra due forme di 1.ª specie è una corrispondenza biunivoca; che conserva il valore del birapporto di ogni gruppo di 4 elementi qualsiasi. La definizione data della proiettività (§ 21) si può invece esprimere, dicendo che essa è una corrispondenza biunivoca tra due forme di 1.ª specie, che conserva il valore del birapporto di ogni gruppo armonico, cioè che conserva il birapporto di 4 elementi ogniqualvolta esso valga — 1.

Ecco dunque sotto un nuovo aspetto il contenuto essenziale del teorema fondamentale della proiettività:

Se due forme di 1.ª specie sono riferite fra loro in modo che ad ogni quaderna di elementi dell'una. formanti un birapporto — 1, corrisponda nell' altra una quaderna di elementi formanti lo stesso birapporto, ad ogni quaderna di elementi di una forma avente un birapporto qualsiasi (diverso da — 1) corrisponderà nell' altra una quaderna di elementi avente lo stesso birapporto.

E ciò porta a rappresentare analiticamente la proiettività tra due forme di 1.ª specie con un'equazione bilineare fra le coordinate (ascisse sulla retta, ecc.)

Corollario. — Dalla conservazione del birapporto di 4 elementi nella proiettività tra due forme di 1.ª specie si può trarre come corollario un' elegante definizione metrica della proiettività tra due rette.

Sieno u, u' due rette (proprie) proiettive, e si indichino con I, I', i punti di esse che corrispondono rispettivamente ai punti impropri I'_∞ di u', e I_∞ di u. Tali punti sono ambedue propri, escluso il caso che le due rette sieno simili (§ 29); essi prendono il nome di *punti limiti*. Sieno A, A', e B, B'. due coppie di punti corrispondenti in u, u'.

Si avrà l' uguaglianza

$$(A\,B\,I\,I_\infty) = (A'\,B'\,I'_\infty\,I'),$$

ossia

$$\frac{A\,I}{B\,I} = \frac{B'\,I'}{A'\,I'},$$

da cui

$$A\,I \cdot A'\,I' = B\,I \cdot B'\,I'.$$

Dunque: *In due punteggiate proprie proiettive, non simili, il prodotto delle distanze di due punti corrispondenti dai rispettivi punti limiti è costante.*

§ 35. Trasformate proiettive di una proiettività - Invariante assoluto. — Si abbia in una forma di 1.ª specie u una proiettività π, ed essendo u' un' altra forma di 1.ª

specie, si ponga tra u ed u' una proiettività Ω: in u' si avrà una proiettività

$$\pi' \equiv \Omega \, \pi \, \Omega^{-1}$$

che si dirà la *trasformata* della π mediante la Ω, giacchè la Ω fa corrispondere a due elementi di u omologhi in π, due elementi di u' omologhi in π'.

La π è alla sua volta la trasformata della π' mediante la Ω^{-1}, giacchè si ha

$$\pi \equiv \Omega^{-1} \, \pi' \, \Omega.$$

Si dice anche che le π, π' sono proiettività *proiettive*.

Se due proiettività (risp. in u, u') sono proiettive (cioè trasformate l'una dell'altra mediante una proiettività tra u, u'), esse sono entrambe ellittiche, o entrambe iperboliche, o entrambe paraboliche Questa osservazione prova già che due proiettività in forme di 1.ª specie non sono sempre proiettive.

Lasciando da parte il caso delle proiettività ellittiche, rivolgiamoci ora ad esaminare quando avverrà che due proiettività ambedue iperboliche o paraboliche sieno proiettive.

Consideriamo dapprima due proiettività ambedue iperboliche π, π', risp. nelle forme u, u': sieno M, N i due elementi uniti di π (su u); A, A_1 due elementi corrispondenti nella stessa π.

Se la π' è trasformata proiettivamente nella π dalla proiettività Ω, la Ω farà corrispondere ad M, N due elementi M', N' di u', che saranno uniti per π', e farà corrispondere ad A, A_1 due elementi A', A'_1 omologhi in π': si avrà dunque

$$MNAA_1 \; \Pi \; M'N'A'A_1'.$$

E per conseguenza (§ 33) se B, B_1 sono due altri elementi qualsiansi omologhi in π', si avrà

$$MNAA_1 \; \Pi \; M'N'BB_1.$$

Questa relazione non è in generale soddisfatta date ad arbitrio le π. π', ma essa esprime la condizione non solo necessaria, bensì anche sufficiente perchè le proiettività π, π' sieno proiettive. Infatti, se essa è soddisfatta, la proiettività

$$T = \begin{pmatrix} M & N & A \\ M' & N' & B \end{pmatrix}$$

trasforma evidentemente la

$$\pi = \begin{pmatrix} M & N & A \\ M & N & A_1 \end{pmatrix}$$

nella

$$\pi' \equiv \begin{pmatrix} M' & N' & B \\ M' & N' & B_1 \end{pmatrix}.$$

La relazione

$$M\,N\,A\,A_1 \;\Pi\; M'\,N'\,B\,B_1$$

equivale, come sappiamo, all' uguaglianza dei birapporti

$$(M\,N\,A\,A_1) = (M'\,N'\,B\,B_1),$$

quindi il resultato ottenuto si può enunciare nel modo seguente * (v. § 33):

La condizione necessaria e sufficiente perchè due proiettività iperboliche, appartenenti a forme di 1.ª specie, sieno proiettive, è l' uguaglianza dei loro invarianti assoluti.

Osservazione. — Quando tale condizione è soddisfatta, si possono sempre trasformare le due proiettività l' una nell' altra in infiniti modi, facendo corrispondere ai due elementi uniti dell' una gli elementi uniti dell'altra, e fissando ad arbitrio altri due elementi omologhi

Consideriamo ora *due proiettività paraboliche*; si può dimostrare che esse *sono sempre proiettive.* Sieno invero M ed M' i punti uniti delle proiettività paraboliche π, π', risp. date nelle forme u, u', e sieno A, A_1 due elementi di u corrispondenti in π, e A', A'_1 due ele-

menti di u' corrispondenti in π'. Poniamo fra u. u' la proiettività

$$\Omega = \begin{pmatrix} M & A & A_1 \\ M' & A' & A'_1 \end{pmatrix}.$$

essa trasforma la proiettività parabolica

$$\pi \equiv \begin{pmatrix} M & M & A \\ M & M & A_1 \end{pmatrix}$$

nella

$$\pi' = \begin{pmatrix} M' & M' & A' \\ M' & M' & A'_1 \end{pmatrix};$$

dunque le π, π' sono proiettive, *c. d. d.*

Osservazione. * — L'invariante assoluto d'una proiettività parabolica $(M\,M\,A\,A_1)$ deve considerarsi come uguale all'unità, ed è quindi uguale per tutte le proiettività paraboliche.

CAPITOLO VII

Involuzione nelle forme di 1.ª specie.

§ 36. **Involuzione.** — Data in una forma di 1.ª specie u una proiettività ω, non avviene in generale che essa equivalga alla sua inversa, cioè che sia $\omega \equiv \omega^{-1}$. Invero se A, A' sono elementi corrispondenti in ω, la ω può considerarsi come definita dalle terne corrispondenti $A\,A'\,B$, $A'\,A''\,B'$, dove A'', B, B' sono certi altri elementi della forma, ed allora si vede che la $\omega \equiv \begin{pmatrix} A & A' & B \\ A' & A'' & B' \end{pmatrix}$ non equivale certo alla $\omega^{-1} \equiv \begin{pmatrix} A' & A'' & B' \\ A & A' & B \end{pmatrix}$ se A'' è diverso da A'.

Se, invece di parlare di una sola forma, si considerano due forme di 1.ª specie u, u' sovrapposte, riferite mediante una proiettività ω, si può dire che un elemento A della forma, considerato come appartenente alla u dà un corrispondente A' in u' (suo omologo in ω); considerato invece come appartenente ad u', dà *in generale* un *diverso* corrispondente A_1 (suo omologo in ω^{-1}).

Definizione. — In una forma di 1.ª specie una proiettività non identica, che coincida colla sua inversa, dicesi *proiettività involutoria* o *involuzione*.

Se, invece di parlare di una sola forma, si parla di due forme di 1.ª specie sovrapposte u, u', in involuzione, non vi è luogo a distinguere l'una forma dall'altra, giacchè ogni elemento considerato come appartenente ad u o ad u' dà, in questo caso, lo stesso corrispondente.

Osservazione. — Non si può parlare di involuzione tra forme di 1.ª specie distinte.

Invece di esprimere la condizione perchè una proiettività ω sia involutoria, colla relazione

$$\omega \equiv \omega^{-1},$$

essa si può esprimere colla relazione equivalente

$$\omega^2 \equiv 1,$$

la quale afferma che la ripetizione della proiettività ω produce l'identità, vale a dire che: se in una proiettività involutoria ω (posta in una forma di 1.ª specie) ad un elemento A corrisponde A', anche ad A' corrisponde A; cioè i due elementi A, A' *si corrispondono in doppio modo.* Per effetto di questa corrispondenza in doppio modo non vi è luogo a distinguere nella *coppia* AA' il *primo* elemento dal *secondo* (ciò che avviene invece se la ω non è involutoria); così l'involuzione può riguardarsi come una *serie di infinite coppie* (analoghe ad AA') *tale che ogni elemento della forma appartiene ad* **una** *coppia.*

Una coppia di elementi, che si corrispondono (in doppio modo) in una involuzione, si dice una coppia di *elementi coniugati* nell'involuzione.

In una qualunque proiettività non ellittica, data in una forma di 1.ª specie, esistono coppie di elementi omologhi (coincidenti), che si corrispondono in doppio modo, e sono quelle costituite dagli elementi uniti.

Sussiste ora l'importante

Teorema. — *Se in una forma di 1.ª specie è data una proiettività ω, nella quale due elementi distinti si corrispondono in doppio modo, altrettanto avviene per*

ogni altra coppia di elementi omologhi, cioè la proiettività è una involuzione

Sieno A, A' gli elementi distinti, che si corrispondono in doppio modo in ω, e sia BB' un'altra coppia qualunque di elementi omologhi: allora la ω può ritenersi individuata dalla corrispondenza delle terne $AA'B$, $A'AB$, ossia (usando della solita notazione) $\omega \equiv \begin{pmatrix} A & A' & B \\ A' & A & B' \end{pmatrix}$.

Ora si ha (§ 33).

$$AA'BB' \,\Pi\, A'AB'B,$$

questa relazione significa appunto che a B' corrisponde B nella proiettività $\omega \equiv \begin{pmatrix} A & A' & B \\ A' & A & B' \end{pmatrix}$, dunque B, B' si corrispondono in doppio modo.

Essendo $B\,B'$ una qualunque coppia di elementi omologhi in ω, la ω è un'involuzione, *c d.d.*

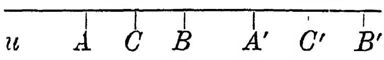
Corollario. — *In una forma di prima specie u esiste* **una** *involuzione alla quale appartengono due date coppie di elementi coniugati (senza elementi comuni), di cui una almeno costituita da elementi distinti.*

Se invero $A\,A'$, $B\,B'$ sono le coppie date e non è $A \equiv A'$, l'involuzione in cui A, A' e B, B' sono coniugati è la proiettività perfettamente determinata $\begin{pmatrix} M & M' & B \\ M' & M & B' \end{pmatrix}$. nella quale necessariamente a B' corrisponde B. La proposizione enunciata verrà estesa fra poco al caso in cui ambedue le coppie sieno costituite ciascuna da elementi coincidenti (distinti fra loro).

§ 37. **Senso d'una involuzione.** — In una forma di 1.ª specie u sia data una involuzione ω, nella quale le coppie di elementi (distinti) $A\,A'$, $B\,B'$ sono coppie di elementi coniugati. Essa fa corrispondere al segmento ordinato $\overline{A\,B\,A'}$ della forma, il segmento ordinato $\overline{A'\,B'\,A}$.

a) Supponiamo dapprima che B, B' separino A, A': allora i due segmenti $\overline{A\,B\,A'}$, $\overline{A'\,B'\,A}$ sono complementari e però hanno lo stesso senso; quindi la proiettività involutoria ω è concorde.

Ogni altro elemento C del segmento $\overline{A\,B\,A'}$ ha il suo coniugato C' nel complementare, quindi C, C' non possono coincidere e debbono separare A, A'. Accade perciò



che al segmento $\overline{C\,A\,C'}$ di u corrisponde in ω il segmento complementare $\overline{C'\,A'\,C}$, e però anche $C\,C'$, ed ogni altra coppia di elementi coniugati in ω, si separano.

Dunque, se due coppie di elementi coniugati in ω si separano, altrettanto accade per due altre coppie qualunque di elementi coniugati in essa. e la ω è una involuzione concorde.

Viceversa, se la ω è concorde, i due segmenti ordinati corrispondenti $\overline{A\,B\,A'}$, $\overline{A'\,B'\,A}$ hanno lo stesso senso e però sono complementari, onde B, B' separano A, A'. Allora la ω non può avere elementi uniti.

b) Supponiamo invece che le coppie $A\,A'$, $B\,B'$ non si separino. Allora al segmento ordinato $\overline{A\,B\,A'}$ corrisponde $\overline{A'\,B'\,A}$, che è il medesimo segmento ordinato in senso inverso, quindi la ω è discorde.

Perciò vi sono in ω due elementi uniti (distinti), che diconsi gli *elementi doppi* della involuzione.

Segue che: se, in ω, due coppie di elementi coniugati non si separano, due qualunque altre coppie di elementi coniugati non si separano e la ω è discorde iperbolica: altrimenti si sarebbe nel caso *a*) e la ω risulterebbe concorde.

Deduciamo il

TEOREMA. — *In una forma di 1.ª specie una involuzione è concorde ed ellittica o discorde ed iperbolica, secondochè due coppie di elementi coniugati di essa si separano oppur no.*

Prendendo due coppie che si separano, o viceversa, si determina un'involuzione rispettivamente ellittica o iperbolica, ciò che dimostra l'effettiva possibilità dei due casi.

Non esistono proiettività involutorie paraboliche, poichè esse sarebbero concordi e un'involuzione concorde è ellittica.

Osservazione — Facendo il confronto tra i risultati ottenuti in questo § e quelli del § 31, vediamo che mentre il *senso* (cioè l'essere concorde o discorde) non basta in generale a decidere della esistenza di punti uniti in una proiettività, tranne in un caso (cioè quando la proiettività è discorde), esso basta sempre per l'involuzione.

Dimostriamo ora il

Teorema. — *In una forma di 1.ª specie due involuzioni, di cui una almeno sia ellittica, hanno sempre una coppia comune.*

Riferiamoci ad una punteggiata.

Si considerino, sopra una retta u, due involuzioni ω, T. Un punto qualunque Y della retta avrà come coniugati rispetto ad ω, T, due punti X, X', e questi due punti (al variare di Y) si corrisponderanno nella proiettività $(T\omega^{-1} \equiv)\ T\omega$. Ora se tale proiettività ha un punto unito U, questo ha lo stesso coniugato U' rispetto alle due involuzioni, e preso insieme ad U' costituisce appunto una coppia comune alle due involuzioni ω, T; la proiettività nominata ha allora come punto unito anche U'.

Ciò posto supponiamo che una delle due involuzioni, p. e. la ω, sia ellittica (concorde), e distinguiamo i due casi in cui la T sia iperbolica (discorde), oppure ellittica (concorde).

a) La T sia iperbolica.

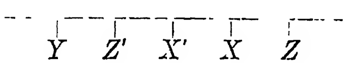
Le involuzioni ω, T avendo senso opposto, la proiettività prodotto $T\omega$ è discorde, essa ha dunque certo due punti uniti (§ 31), i quali costituiscono la coppia comune alle involuzioni ω, T.

b) La T sia ellittica.

La proiettività prodotto $T\omega$ è in questo caso concorde, ma pure essa ammette ancora due punti uniti che formano la coppia comune a ω, T.

Per dimostrare l' effettiva esistenza dei nominati punti uniti, basterà costruire un segmento della retta u, cui corrisponda, nella detta proiettività, un segmento interno (§ 19).

Consideriamo perciò il punto Z coniugato di X' in ω. ed il punto Z' coniugato di X in T, allora potremo scrivere:



$$\omega \equiv \begin{pmatrix} Y & X & X' & Z \\ X & Y & Z & X' \end{pmatrix}$$

$$T \equiv \begin{pmatrix} Y & X' & X & Z' \\ X' & Y & Z' & X \end{pmatrix}$$

Ora le coppie $X\,Y$, $X'\,Z$, coniugate nell' involuzione ellittica ω, si separano, e similmente si separano le coppie $X'\,Y$, $X\,Z'$ coniugate in T. Si deduce che nell' ordine naturale $(Y\,X'\,X)$ della retta u, i punti Y, Z', X', X, Z si susseguono nella disposizione scritta, e però il segmento $Z'\,X'$ che non contiene Y è interno al segmento $Y\,X$ che non contiene Z. Ma al secondo segmento corrisponde appunto il primo nella proiettività $T\,\omega \equiv \begin{pmatrix} Z & Y & X \\ Y & Z' & X' \end{pmatrix}$.

Ecco dunque costruito un segmento di u cui corrisponde nella detta proiettività un segmento interno, come era richiesto. Ciò dimostra il teorema enunciato.

§ 38. **Involuzioni iperboliche.** — Si ha il

Teorema. — *In una forma di 1.ª specie gli elementi doppi di una involuzione iperbolica ω separano armonicamente le coppie di elementi coniugati.*

Sieno M, N gli elementi doppi di ω, ed A, A' due elementi coniugati distinti di essa. In ω al gruppo di

quattro elementi $MNAA'$ corrisponde il gruppo $MNA'A$; quindi

$$M\,N\,A\,A' \;\overline{\wedge}\; M\,N\,A'\,A,$$

e però (§ 33) il gruppo $(M\,N\,A\,A')$ è armonico. *c d d*

Ciò si esprime anche dicendo: * L' invariante assoluto d' una involuzione iperbolica è -1.

COROLLARIO — *Dati, in* u, *gli elementi doppi* M, N *(distinti) di una involuzione* ω, *questa è definita e si costruisce determinando di ogni elemento il coniugato armonico rispetto ad* M, N.

Combinando questo corollario con quello del § 36 si ha.

In una forma di 1.ª specie u *esiste* una *involuzione a cui appartengono due coppie di elementi coniugati distinti o coincidenti, senza elementi comuni.*

Segue che: date in u tre o più coppie di elementi (distinti o coincidenti) ad arbitrio, esse non appartengono in generale ad una involuzione; se questo avviene si dice che *le dette coppie sono in involuzione* o che una di esse è in involuzione colle altre. Se, in u, due coppie di elementi sono in involuzione ciascuna con due medesime, le quattro coppie sono in involuzione, ecc.

OSSERVAZIONE 1.ª — Dire che una coppia di elementi distinti AA' è in involuzione con due coppie, ciascuna costituita di elementi coincidenti MM, NN, è lo stesso che affermare che M, N separano armonicamente A, A'.

OSSERVAZIONE 2.ª — Ricordando il risultato del § 20, possiamo ora completare ciò che è stato detto nel § precedente intorno alla coppia comune a due involuzioni, enunciando che:

In una forma di 1.ª specie, due involuzioni iperboliche, dotate di elementi doppi tutti distinti, hanno o non hanno una coppia comune, secondo che i loro elementi doppi non si separano o si separano.

Se le due involuzioni hanno un elemento doppio comune, questo costituisce la coppia ad esse comune.

§ 39. — **Teorema del quadrangolo.** — Sussistono i seguenti teoremi correlativi nella geometria piana:

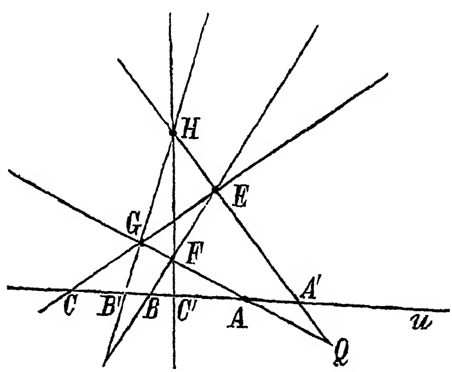
Nel piano

le tre coppie di lati opposti di un quadrangolo completo segano una retta, non appartenente ad alcun vertice del quadrangolo, secondo tre coppie di punti in involuzione.

le tre coppie di vertici opposti di un quadrilatero completo sono proiettate da un punto, non appartenente ad alcun lato del quadrilatero, secondo tre coppie di raggi in involuzione.

Basterà dimostrare il teorema a sinistra.

Sia $HGEF$ il quadrangolo. u la retta segante, e AA', BB', CC' le tre coppie di punti sezioni di u rispettivamente colle coppie di lati opposti HE, GF; HG, EF. EG, HF. Una di tali coppie (senza elementi comuni) p. e.



AA', sarà costituita di punti distinti. Ciò posto consideriamo il punto $Q \equiv FG \, . \, EH$, che è un punto diagonale del quadrangolo.

Si ha

$$AA'B'C' \;\Pi\; AQGF$$

(essendo un gruppo proiezione dell'altro da H);

$$AQGF \;\Pi\; AA'CB$$

(essendo un gruppo proiezione dell'altro da E).

Inoltre (pel § 33)

$$A\,A'\,C\,B \;\Pi\; A'\,A\,B\,C,$$

quindi

$$A\,A'\,B'\,C' \;\Pi\; A'\,A\,B\,C.$$

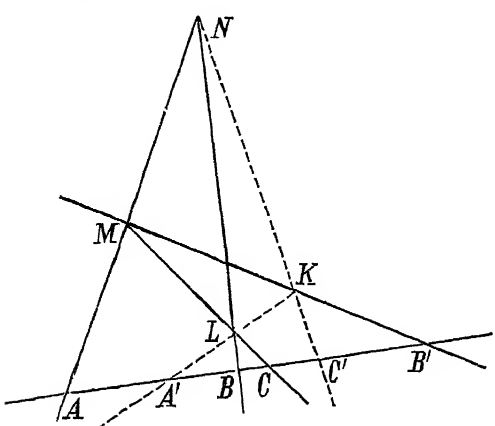
Ora la proiettività $\begin{pmatrix} A\,A'\,B \\ A'\,A\,B \end{pmatrix}$ nella quale si corrispondono le coppie AA', $A'A$, BB', CC' è un'involuzione pel teorema del § 36.

Ciò dimostra il teorema.

Si enunceranno per esercizio i teoremi correlativi dei precedenti, nello spazio, e si noteranno i casi particolari in cui la u passi per un punto diagonale o per due punti diagonali del quadrangolo.

Costruzioni. — Il precedente teorema fornisce una nuova costruzione dell'involuzione nelle forme di 1.ª specie.

Riferendoci, per esempio, alla punteggiata u, su cui sia definita un'involuzione mediante due coppie di punti coniugati $A\,A'$, $B\,B'$, si può costruire in essa il coniugato C' di un punto di $C\,u$ nel seguente modo:



Si conducano per A, B, C tre rette fuori di u, in un piano, che formino un trilatero avente per vertici, rispettivamente opposti ad essi, i punti L, M, N; si unisca A' con L e B' con M; l'intersezione K delle due rette vien proiettata da N su u nel coniugato C' di C.

L'unicità del punto C' costruito in tal modo, quando si vari il quadrangolo costruttore, segue anche dal teorema sui quadrangoli prospettivi ed omologici del § 11.

§ 40. * **Proprietà metriche dell'involuzione nella punteggiata.** — Data, in una punteggiata propria u, una proiettività π, si avranno in generale su u due punti (limiti) corrispondenti al punto all'infinito in π ed in π^{-1}, i quali punti saranno propri, se π non è una similitudine (§ 29). In tal caso essi potranno tuttavia coincidere in uno stesso punto (proprio) O, ed anzi ciò accadrà allora ed allora soltanto quando la proiettività π sia involutoria; il punto O, coniugato del punto all'infinito nell'involuzione π, prende il nome di *centro* di essa.

Consideriamo su u un'involuzione dotata di centro proprio O (escludendo dunque, per ora, il caso che essa abbia il punto all'infinito come doppio). Sieno AA', BB' due coppie di punti coniugati, e si designi con O_∞ il punto all'infinito di u, coniugato ad O. Si ha allora

$$A\,B\,O\,O_\infty \;\Pi\; A'\,B'\,O_\infty\,O,$$

e quindi, uguagliando i birapporti dei due gruppi di 4 punti, si ricava:

$$(A\,B\,O\,O_\infty) = (A'\,B'\,O_\infty\,O),$$

ossia

$$\frac{A\,O}{B\,O} = \frac{B'\,O}{A'\,O},$$

quindi

$$A\,O \cdot A'\,O = B\,O \cdot B'\,O.$$

Dunque: *Il prodotto delle distanze di due punti coniugati dal centro (proprio) dell'involuzione è una costante*, che dicesi *costante dell'involuzione.*

Questa relazione rientra del resto in quella più generale dimostrata (nello stesso modo) in fine al § 34.

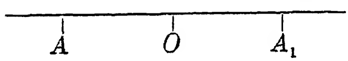
È chiaro poi che, viceversa, essa esprime una proprietà metrica caratteristica per l'involuzione.

Indicata con k la costante di una involuzione, il suo segno ci dà il senso di esso. se k è positiva, l'involuzione stessa è discoide e si hanno due punti uniti M, N di cui O è punto medio. in tal caso

$$k = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2.$$

L'involuzione su u appare completamente diversa, sotto l'aspetto metrico, quando il punto all'infinito e un punto doppio. vale a dire quando essa e una similitudine (§ 29) Invero, su u, *una similitudine involutoria, è sempre una simmetria rispetto ad un centro,* generata dal ribaltamento di u attorno ad esso

Infatti, se O è l'ulteriore punto doppio della involuzione nominata, esso, insieme al punto all'infinito, separa armonicamente ogni coppia di punti omologi AA'. onde



$$OA = -OA'.$$

È stato avvertito d'altra parte (§ 32) che la simmetria rispetto ad un centro e l'unica specie di congruenza inversa che si possa avere in una punteggiata propria.

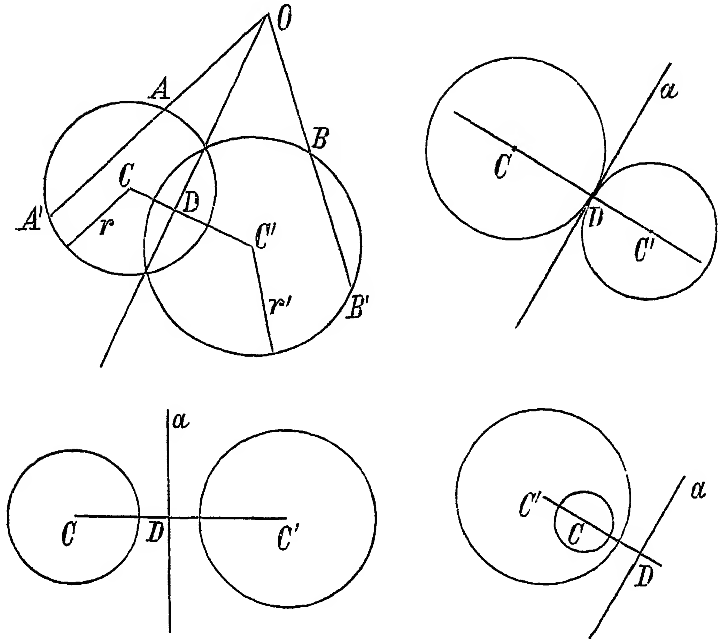
Osservazione. — Nel § 32 avevamo caratterizzato dal punto di vista grafico le congruenze dirette sopra una punteggiata come « proiettività paraboliche col punto unito improprio »: qui *risultano caratterizzate le congruenze inverse (simmetrie) come « involuzioni con un punto doppio all' infinito »*.

Dalle cose dette risulta una notevole generazione metrica dell'involuzione nelle punteggiate, mediante fasci di cerchi.

Ricordiamo dalla geometria elementare che due cerchi d'un piano individuano sempre un *asse radicale,* luogo dei punti di ugual *potenza* rispetto ad essi (cioè, riferendoci alla 1.ª figura della pagina seguente, luogo dei punti O, per cui

$$OA \cdot OA' = OB \cdot OB')$$

Questo asse radicale è la retta congiungente i due punti d'incontro dei due cerchi, se questi s'incontrano; è la tangente comune se si toccano. e può essere determinato



in tutti i casi come la retta perpendicolare alla congiungente i centri C, C' dei due cerchi di raggi r, r', nel punto D, le cui distanze da C, C' sono tali che

$$\overline{CD}^2 - \overline{C'D}^2 = r^2 - r'^2.$$

Si avverta che l'asse radicale di due cerchi concentrici è la retta all' infinito del loro piano, e viceversa.

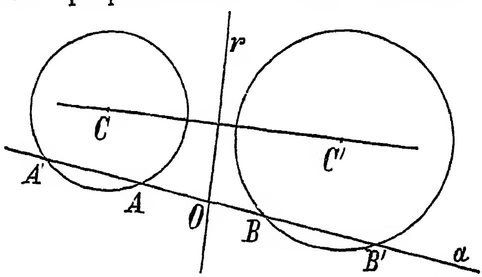
Ricordiamo inoltre che, dati due circoli, ve ne sono infiniti altri, che insieme ad uno di essi danno come asse radicale l'asse a dei primi due; essi formano un *fascio di circoli* che ha come asse radicale la retta a.

Questo fascio è determinato indifferentemente da due qualunque dei suoi circoli. Per ogni punto del piano che

non sia comune a tutti i circoli di un fascio (cioè che non sia un *punto base*) passa *un* circolo di esso.

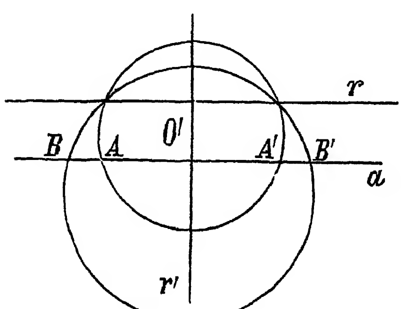
Se due circoli hanno comuni due punti, questi sono punti base del fascio determinato dai due circoli, ed il fascio è costituito da *tutti* i circoli passanti per i due punti.

I centri dei circoli d'un fascio stanno sopra una retta perpendicolare all'asse radicale, ecc.



Ciò posto, si consideri nel piano un fascio di circoli di asse radicale r, e si consideri una retta a non passante per un punto base del fascio. Sia $O \equiv ar$, e suppongasi dapprima che O sia proprio; sieno AA', BB' due coppie di punti segate su a da due cerchi del dato fascio. Essendo r l'asse radicale dei due cerchi, si ha
$$OA \,.\, OA' = OB \,.\, OB'.$$

Dunque su a le coppie AA' e BB' appartengono ad una involuzione avente come centro O; a tale involuzione appartengono similmente tutte le coppie segate dai circoli del fascio sulla retta a.



Suppongasi ora che O sia improprio, cioe che le rette a, r sieno parallele, oppure che la r sia impropria; allora si consideri la retta r' perpendicolare ad r che contiene i centri dei circoli del fascio, e sia O' la sua intersezione con a.

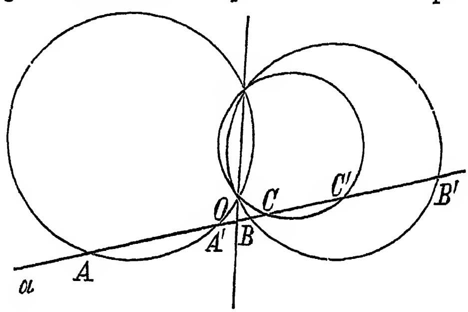
Il punto O' è punto medio di tutte le corde intercette su a dai cerchi del fascio (che incontrano a); quindi

le coppie segate da tali circoli appartengono ad una simmetria di centro O'

Possiamo quindi enunciare il teorema:

Segando i circoli d'un fascio con una retta a *del suo piano, non passante per un punto base, si ottengono le coppie d'una involuzione, che ha come centro l'intersezione della retta stessa coll'asse radicale del fascio, e, nel caso particolare che queste due rette sieno parallele, è una simmetria rispetto al punto sezione di* a *colla perpendicolare contenente i centri dei circoli del fascio.*

È chiaro che ogni involuzione sopra una retta a può considerarsi come ottenuta in tal modo. Invero se AA', BB' sono due coppie di un'involuzione ω su a (coppie che individuano ω), si possono condurre ad arbitrio



per AA' e rispettivamente per BB' due circoli, segando con a il fascio K di circoli determinato dai due nominati, si ottiene appunto l'involuzione ω. Si osservi che può anche farsi sempre in modo che il fascio K abbia due punti base.

Costruzioni. — L'osservazione precedente permette una nuova costruzione dell'involuzione ω su a. Invero il coniugato di un punto C si può ottenere, costruendo il circolo del fascio K, che passa per C, e determinandone l'ulteriore intersezione C' con a.

§ 41.* **Congruenze involutorie nel fascio.** — Cerchiamo nel fascio (proprio) U di raggi (e analogamente si direbbe pel fascio di piani) la condizione perchè una congruenza sia involutoria.

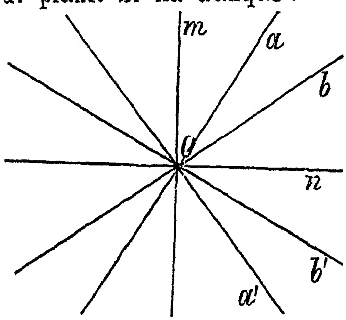
Una congruenza diretta equivale ad una rotazione in un dato senso, di un certo angolo α, del fascio U su sè

stesso (cfr. § 32). Se tale congruenza deve essere involutoria, occorre che la rotazione dell' angolo $2\,\alpha$ sovrapponga in U ogni raggio a se stesso, cioè l' angolo $2\,\alpha$ deve essere un multiplo di due angoli retti [$2\,\alpha \equiv O$ (mod. π)]. Se la data congruenza non è identica, essa equivale dunque ad una rotazione di un angolo retto del fascio U su sè stesso.

La congruenza involutoria così generata si può definire come la corrispondenza in cui ad ogni raggio corrisponde il raggio perpendicolare in U.

Questa si chiama *l' involuzione degli angoli retti in U.*

Tali cose possono ripetersi analogamente pel fascio di piani. Si ha dunque:



In un fascio (proprio), *una congruenza diretta involutoria è l' involuzione degli angoli retti.*

Invece si ha:

In un fascio (proprio) *ogni congruenza inversa è involutoria*, poichè tale congruenza è una simmetria rispetto ai due elementi doppi ortogonali (§ 32).

Stante il resultato del § 36, una involuzione data in un fascio, diversa dall' involuzione (ellittica) degli angoli retti, avrà con questa *una* coppia comune. Si ottiene così la seguente proprietà:

In un' involuzione di un fascio proprio esiste sempre una coppia di elementi (raggi o piani) coniugati ortogonali: questa coppia è unica, se la data involuzione non è quella degli angoli retti.

Nel piano, segando colla retta all' infinito le involuzioni degli angoli retti di tutti i fasci di raggi, si ottiene una determinata involuzione che dicesi la *involuzione assoluta del piano* (congruenza involutoria diretta sopra la retta impropria). Questa è la corrispondenza biunivoca tra le direzioni ortogonali del piano.

Tenendo presente un resultato del § 29 si avrà *Una proiettività tra due punteggiate improprie è una congruenza, allorchè fa corrispondere all' involuzione assoluta sull' una. l' involuzione assoluta sull' altra;* perchè ciò accada basta anzi si sappia che a due coppie di punti coniugati nella prima involuzione corrispondono, per effetto della proiettività nominata, due coppie di punti coniugati nella seconda. Invero tali condizioni portano che due qualunque fasci propri di raggi proiettanti le punteggiate risultino congruenti.

§ 42. **Cenno sulle proiettività cicliche.** — Se si ha in una forma di 1.ª specie una proiettività π. si possono considerare le proiettività $\pi^2 = \pi \cdot \pi$, $\pi^3 = \pi^2 \cdot \pi$ ..., che nascono dalla ripetizione della π.

In generale si ottiene così da un punto A (non unito) una successione infinita di punti corrispondenti in π, π^2, π^3 ...; punti che designeremo con A'. A'', A'''. ... A^n ...

Ma può avvenire che sempre il punto A^n coincida con A, vale a dire che π^n sia l'identità, ciò che s' indica scrivendo $\pi^n = 1$

Se ciò avviene per un certo valore di n, si dice che π è una *proiettività ciclica d' ordine* n e che i gruppi analoghi ad $A\, A'\, A''$.... A^{n-1} sono i *cicli* di essa. Le proiettività cicliche di 2.° ordine sono le involuzioni.

Si può dimostrare che *una proiettività* π *di una forma di 1.ª specie è ciclica d'ordine* n > 2 *se* π^n *ha un elemento unito, che non sia unito per* π, cioè se A^n coincide con A.

Si può anche vedere che le proiettività cicliche d'ordine $n > 2$ sono ellittiche.

*Non vi sono sulla retta congruenze dirette cicliche.

Nel fascio, una rotazione dell' angolo $\alpha = \dfrac{2\,\pi}{n}$ genera una congruenza diretta ciclica, d' ordine n.

CAPITOLO VIII

Proiettività tra forme di 2.ª specie.

§ 43. **Definizioni.** — Due piani si dicono *omografici*, allorchè sono riferiti in modo che ad ogni elemento, punto o retta, dell' uno, corrisponda un elemento, rispettivamente punto o retta, dell' altro, in guisa che ad un punto e ad una retta d' un piano che si appartengono corrispondano sempre nell' altro un punto e una retta che si appartengono.

Si dice *omografia* la corrispondenza che intercede fra due piani omografici. Si può avere un semplice esempio d' omografia fra due piani, considerando la corrispondenza (*prospettività*), che nasce proiettando un piano sull' altro da un punto esterno.

Un altro esempio * di omografia tra due piani si ha operando sopra uno dei due piani un movimento (nel senso della geometria elementare), in guisa da sovrapporlo all' altro piano, e considerando come corrispondente ad ogni punto del primo piano la nuova posizione da esso assunta

Un' omografia fra due piani si può considerare come una corrispondenza biunivoca soltanto fra i punti di due piani (o soltanto come una corrispondenza biunivoca fra

i due piani rigati). Sussiste allora la proprietà fondamentale che: *mentre un punto si muove in un piano descrivendo una retta, il corrispondente si muove nell'altro piano descrivendo esso pure una retta* (la retta corrispondente alla nominata)

Allorchè sono dati due piani α, α' si può in infiniti modi pensare una corrispondenza biunivoca fra i punti dell'uno e i punti dell'altro; ma una tale corrispondenza non è in generale un'omografia. Se invero si fa muovere un punto P nel piano α descrivendo la retta p, il punto corrispondente P' in α' non descriverà in generale una retta, ma (ammessa la continuità) una *curva* qualsiasi. Il fatto che P' descriva una retta quando P descrive una retta in α è appunto ciò che caratterizza la speciale corrispondenza fra due piani detta « *omografia* ». Invero, se tale condizione si suppone realizzata, si può riguardare come corrispondente di ogni retta p del piano α la retta p', luogo dei punti omologhi di p in α'; e si ha allora che ad ogni elemento, punto o retta, di α, corrisponde un elemento dello stesso nome in α', e ad un punto e una retta di α che si appartengono corrispondono in α' un punto e una retta che si appartengono.

È ovvio fare l'osservazione correlativa alla precedente, osservazione che per brevità omettiamo.

Due *piani* si dicono *reciproci* o *correlativi* allorchè sono riferiti in modo, che ad ogni elemento, punto o retta. dell'uno, corrisponda un elemento di nome diverso. rispettivamente retta o punto, nell'altro, in guisa che ad un punto e una retta d'un piano, che si appartengono, corrispondano nell'altro piano una retta ed un punto che del pari si appartengono.

Si può considerare la *reciprocità* (cioè la nominata corrispondenza) fra due piani, come una corrispondenza fra gli elementi (punti) di un piano punteggiato e gli elementi (rette) di un piano rigato; questa corrispondenza

gode allora della proprietà fondamentale e caratteristica seguente. « *mentre un punto si muove nel primo piano, descrivendo una retta, la retta omologa nell' altro si muove passando sempre per un punto fisso.* » In forza di questa proprietà (che per una corrispondenza qualsiasi può non essere soddisfatta) anche ad ogni retta del 1.° piano viene a corrispondere un punto del 2.°, ecc.

Osservazione. — Ciò che si deve contrapporre per dualità all'omografia fra due piani è ancora l'omografia: se si considera la prima omografia come esistente fra i due piani punteggiati, le si contrapporrà la considerazione dell' omografia stessa come esistente fra i due piani rigati.

Ciò che si deve contrapporre per dualità alla reciprocità o correlazione fra due piani, è ancora la reciprocità · se una volta essa si riguarda, come posta fra un piano punteggiato e un piano rigato, si riguarderà l'altra volta come posta fra un piano rigato e un piano punteggiato.

Le definizioni date di omografia e reciprocità si trasportano subito alle stelle.

Due *stelle* si dicono *omografiche*, se ad ogni retta e ad ogni piano dell' uno corrispondono rispettivamente una retta e un piano dell' altra, con la condizione che se i due elementi nominati della prima stella si appartengono. lo stesso avvenga dei corrispondenti nell' altra.

Due *stelle* si dicono *reciproche* o *correlative*, se ad ogni retta e ad ogni piano dell' una corrispondono reciprocamente nell' altra un piano ed una retta, con la condizione che ad elementi (retta e piano) dell' una, che si appartengono, corrispondano nell' altra elementi (piano e retta) che si appartengono.

Infine si può considerare anche l' *omografia fra un piano ed una stella*, cioè la corrispondenza fra gli elementi, punti e rette del piano, e gli elementi, rette e piani della stella, dove ad elementi (punto e retta) della

stella, che si appartengono, corrispondono elementi nel piano che pure si appartengono. Similmente si ha *la reciprocità fra un piano ed una stella*, quando ad ogni elemento, punto o retta del piano, corrisponde un elemento, rispettivamente piano o retta, nella stella, e ad elementi nel piano che si appartengono corrispondono nella stella elementi che si appartengono.

L'omografia o la reciprocità, secondo ciò che è stato notato diffusamente per l'omografia fra due piani, può riguardarsi come una corrispondenza biunivoca fra gli elementi di due forme di 2.ª specie, dove agli elementi di una forma di 1.ª specie nell'una corrispondono nell'altra elementi di una forma di 1.ª specie. Sotto questo aspetto l'omografia e la reciprocità si presentano sotto un aspetto unico; la differenza sta solo nel nome diverso degli elementi corrispondentisi nelle due forme che s'immaginano riferite. Appunto perciò si abbracciano l'omografia e la reciprocità sotto il nome comprensivo di *proiettività* (fra piani e stelle o fra forme di 2.ª specie).

Si può dire:

Due forme di 2.ª specie sono proiettive, allorchè sono riferite in modo, che a ciascun elemento dell'una corrisponda un elemento dell'altra, con la condizione che ad elementi di una forma di 1.ª specie nell'una corrispondano elementi di una forma di 1.ª specie (omologa) nell'altra.

Dalle definizioni date segue subito che: *Due forme di 2.ª specie proiettive ad una terza sono proiettive fra loro.*

Due forme di 2.ª specie omografiche ad una 3.ª sono omografiche fra loro.

Due forme di 2.ª specie reciproche ad una 3.ª sono omografiche fra loro.

Due forme di 2.ª specie, una delle quali è omografica e l'altra è reciproca ad una medesima, sono reciproche fra loro.

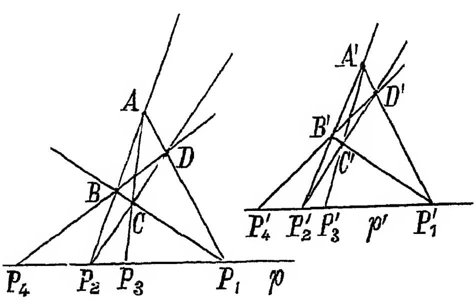
Queste proposizioni si possono anche raccogliere nell'enunciato.

Il prodotto di due proiettività tra forme di 2.ª specie è una proiettività, e precisamente un' omografia o una correlazione, secondochè le proiettività componenti sono della stessa natura o di natura diversa.

Se due forme di 2.ª specie sono riferite fra loro in modo che si passi dall'una all'altra con un numero finito di proiezioni e sezioni, esse sono omografiche. La proposizione inversa è pure vera come si potrebbe dedurre dai resultati che seguono.

§ 44. **Teorema fondamentale.** — Nello studio della proiettività tra due forme di 2.ª specie possiamo sostituire eventualmente alle stelle dei piani prospettivi (loro sezioni) e quindi limitarci a considerare la proiettività (omografia o reciprocità) tra due piani Così faremo appunto nel seguito, almeno generalmente.

Consideriamo due piani omografici α e α', ed in essi due rette omologhe p, p'. Mentre un punto P si muove su p, il corrispondente P' si muove su p': nasce così fra le due rette p, p' una corrispondenza biunivoca. È facile vedere che questa corrispondenza è una proiettività. Basta per questo (riferendoci alla definizione) mostrare che a 4 punti $P_1 P_2 P_3 P_4$ di p, formanti un gruppo armonico, corrispondono su p' 4 punti $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ formanti del pari un gruppo armonico. Ora si consideri un quadrangolo $ABCD$ costruttore del gruppo armonico $P_1 P_2 P_3 P_4$ (vedi figura), ad esso



corrisponde nel piano α' un quadrangolo $A' B' C' D'$, di cui due lati passano per P_1, due per P_2, uno per P_3, uno per P'_4, esso prova che il gruppo $P'_1 P'_2 P'_3 P'_4$ è armonico, *c. d. d.*

Abbiamo dunque il teorema fondamentale nella teoria dell' omografia di due piani:

In due piani omografici due punteggiate omologhe sono proiettive.

E nello stesso modo (fatte le convenienti sostituzioni di parole nel ragionamento precedente) si dimostra che:

In due piani reciproci una punteggiata è proiettiva al fascio di raggi omologo.

O più generalmente:

In due forme di 2.ª specie proiettive, forme di 1.ª specie omologhe sono proiettive.

La proiettività che risulta così definita tra le nominate forme di 1.ª specie omologhe, dicesi *subordinata* di quella data tra le forme di 2.ª specie

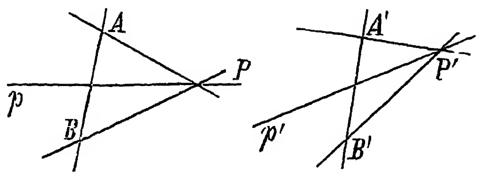
§ 45. **Determinazione della proiettività tra forme di 2.ª specie.** — Il problema capitale della teoria della proiettività tra forme di 1.ª specie era quello di assegnare come possa esser posta e determinata la proiettività fra due forme; lo stesso problema compare qui per le forme di 2.ª specie.

Ci riferiamo al caso di due piani e cominciamo a parlare dell' omografia.

Sieno α, α' due piani omografici, AA', BB' due coppie di punti di essi che si corrispondono nell' omografia. I fasci di raggi A, A' e così i fasci B, B' sono proiettivi; al raggio AB considerato nel fascio A o in B corrisponde ugualmente il raggio $A'B'$.

Un punto qualunque P del piano α, fuori della retta AB, può essere determinato come intersezione delle rette

PA, PB, ed allora il suo corrispondente P' viene determinato come intersezione delle rette omologhe alle nominate nelle proiettività tra i fasci A, A'



e B, B'. Una retta qualsiasi p descritta da P in α, non passante per A o B, può riguardarsi come luogo dei punti d'intersezione dei raggi omologhi di due fasci prospettivi A B. stante la proiettività tra A, A' e B, B', dove al raggio AB corrisponde ugualmente $A'B'$, i fasci A', B' risultano (proiettivi col raggio $A'B'$ unito quindi) prospettivi, ed il luogo delle intersezioni dei raggi omologhi è la retta p', corrispondente alla p, descritta dal punto P'.

Queste osservazioni dimostrano che l'omografia (supposta data) tra α, α' è completamente determinata dalla proiettività tra le coppie di fasci A, A' e B, B'.

Ora prendiamo ad arbitrio, in un piano α, due fasci di raggi A, B, in un piano α' due fasci A', B', rispettivamente proiettivi ai primi, in modo che al raggio AB corrisponda ugualmente (nelle due proiettività) il raggio $A'B'$. Si domanda se si potrà porre tra α, α' un'omografia, in cui si corrispondano le coppie di fasci nominati secondo le proiettività fissate.

La risposta è affermativa

L'omografia in questione si ottiene infatti facendo corrispondere:

1) ad ogni punto P di α, fuori di AB, il punto P' di α' sezione dei raggi corrispondenti a PA, PB, rispettivamente per A' e B';

2) ad ogni retta p descritta da P in α (non passante per A o B), la retta p' descritta da P' in α', luogo delle intersezioni dei raggi per A', B', corrispondenti ai raggi proiettanti da A, B i punti di p (i fasci A', B' così

riferiti proiettivamente ai fasci prospettivi $A . B$ risultano pure prospettivi tra loro, perchè al raggio $A B$ corrisponde sempre $A' B'$);

3) ad ogni punto P della retta AB (fuori di A, B) il punto P' intersezione di $A' B'$ colla retta p' corrispondente ad una qualsiasi retta p (diversa da AB) per P.

Questo punto infatti non varia mutando la p per P, giacche a due rette del piano α' che s'incontrano in un punto fuori della retta $A' B'$ corrispondono sempre due rette di α che s'incontrano in un punto (il quale si costruisce colla costruzione 2)) fuori della retta AB, e per conseguenza due qualsiansi rette di α che s'incontrino su $A B$ (in P) corrispondono a due rette di α' che s' incontrano su $A' B'$, ossia a due rette che incontrano $A' B'$ nel medesimo punto (P').

Mediante le costruzioni 1), 2), 3), viene posta tra i punti e le rette dei piani α, α' una corrispondenza biunivoca, nella quale ad un punto e ad una retta di un piano che si appartengono corrispondono nell' altro piano un punto e una retta che parimente si appartengono. Le costruzioni assegnate pongono dunque tra i piani α, α' un' omografia ben determinata nella quale i fasci A, A' e B, B' si corrispondono secondo le proiettività fissate, facenti corrispondere ugualmente al raggio AB il raggio $A'B'$.

E però siamo condotti al teorema:

Tra due piani esiste un'omografia determinata nella quale si corrispondono due coppie di fasci di raggi secondo proiettività fissate ad arbitrio, colla condizione che al raggio comune ai due fasci di un piano corrisponda ugualmente il raggio comune ai due fasci dell'altro piano

Ora si possono tradurre per dualità i ragionamenti precedenti, sia relativamente a tutti e due i piani, sia relativamente ad uno solo.

I resultati che si ottengono permettono di determinare l'omografia tra due piani mediante due coppie di punteg-

giate proiettive, o la correlazione mediante la proiettività fra due punteggiate e due fasci. Ecco l'enunciato comprensivo che tutti li riassume:

Tra due forme di 2.ª specie esiste una proiettività determinata, in cui si corrispondono due coppie di forme di 1.ª specie proiettive, dove sieno omologhi gli elementi rispettivamente comuni alle due coppie.

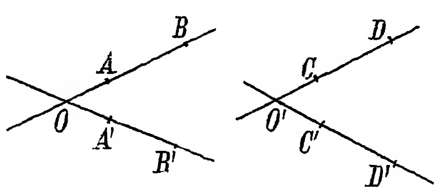
Giova porre questo teorema sotto un'altra forma.

Riferiamoci, per semplicità di linguaggio, al caso d'un'omografia fra due piani punteggiati ed enunciamo poi il risultato generale.

Si abbiano nei due piani α, α' due quaderne di punti $ABCD$, $A'B'C'D'$, di cui tre non appartenenti ad una retta. Si potranno riferire omograficamente i due piani in guisa che le coppie AA, BB. CC', DD' si corrispondano? Questa omografia rimarrà così determinata?

Il precedente teorema mostra appunto che a queste domande deve darsi risposta affermativa.

Invero si considerino, per esempio, le rette AB, CD e le $A'B'$, $C'D'$ e si chiamino O, O' rispettivamente i punti d'intersezione di queste due coppie ($O \equiv AB . CD$, $O' \equiv A'B' . C'D'$).



Fissiamo fra le rette AB, $A'B'$ la proiettività $\begin{pmatrix} A & B & O \\ A' & B' & O' \end{pmatrix}$, che si ottiene facendo corrispondere ad A, B, O rispettivamente A', B', O', e similmente fra le rette CD, $C'D'$ la proiettività $\begin{pmatrix} C & D & O \\ C' & D' & O' \end{pmatrix}$; allora risulta posta tra i piani α, α' un'omografia, in cui le due quaderne di punti si corrispondono. Ma questa omografia in cui le due quaderne di punti si corrispondono è unica, e quindi risulta così determitata: infatti da quella corrispondenza segue

il corrispondersi di O. O' e quindi segue che fra le rette AB, $A'B'$ e le CD, $C'D'$ debbono intercedere le proiettività $\begin{pmatrix} A & B & O \\ A' & B' & O' \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} C & D & O \\ C' & D' & O' \end{pmatrix}$ innanzi nominate, da cui l'omografia fra α, α' riesce definita.

Concludiamo, più in generale, che sussiste il seguente.

Teorema. — *Tra due forme di 2.ª specie esiste una proiettività determinata dalla corrispondenza di 4 coppie di elementi omologhi, purchè tra i 4 elementi fissati in ciascuna delle due forme non ve ne sieno tre appartenenti ad una forma di 1.ª specie.*

Osservazione. — Si può dimostrare che è sempre possibile passare con un numero finito di proiezioni e sezioni da un piano ad un altro in modo che si corrispondano due quadrangoli; correlativamente si dica per due stelle. Si può vedere pure che è possibile passare con un numero finito di proiezioni e sezioni da un piano punteggiato ad una stella di raggi, in modo che ad un quadrangolo del piano corrisponda un quadrispigolo della stella. Da ciò si dedurrebbe

Se due forme di 2.ª specie sono omografiche, si può passare dall' una all' altra con un numero finito di proiezioni e sezioni.

Costruzioni. — La costruzione dell' omografia fra due piani è stato il punto di partenza delle nostre considerazioni. Noi abbiamo esaminato particolarmente il caso in cui l'omografia è definita mediante 2 fasci proiettivi corrispondenti, dove si corrispondono i raggi comuni. Non vi è nessuna difficoltà a sviluppare la costruzione correlativa dell' omografia tra due piani, partendo da due coppie di punteggiate proiettive omologhe, e così facilmente si possono sviluppare le analoghe costruzioni della reciprocità, ecc. E se l' omografia o la reciprocità vengono definite anzichè mediante coppie di forme di 1.ª specie proiettive, mediante due quaderne di elementi omologhi (di cui tre non appar-

tengano ad una forma di 1.ª specie), è subito indicato dalle considerazioni precedenti, come si dovrà procedere nelle costruzioni relative. Siccome però le costruzioni che noi accenniamo sono della massima importanza, anche nella pratica, le spieghiamo qui diffusamente (ritornando anche sul caso di cui si è discorso in principio del §), ma limitandoci alla proiettività fra piani.

Si vogliano riferire omograficamente due piani, date quattro coppie di

punti omologhi, rispettivamente vertici di due quadrangoli $ABCD$, $A'B'C'D'$.

rette omologhe, rispettivamente lati di due quadrilateri $abcd$, $a'b'c'd'$

Tra i lati dei due quadrangoli congiungenti vertici omologhi, ad esempio tra AB ed $A'B'$, risulta posta una proiettività dove si corrispondono A, A' e B, B' ed i punti diagonali dei due quadrangoli $AB \cdot CD$, $A'B' \cdot C'D'$.

Fra i fasci determinati da due lati omologhi dei quadrilateri, ad esempio fra ab ed $a'b'$, risulta posta una proiettività dove si corrispondono a, a' e b, b' e le rette diagonali $ab \cdot cd$, $a'b' \cdot c'd'$.

Così pure tra i fasci di raggi A, A' e tra B, B' ecc risulta posta una proiettività in cui ai raggi AB, AC, AD corrispondono i raggi $A'B'$, $A'C'$, $A'D'$ e così ai raggi BA, BC, BD i raggi $B'A'$, $B'C'$, $B'D'$, ecc.

Così pure tra le rette a, a' e tra le b, b', ecc. risulta posta una proiettività in cui ai punti ab, ac, ad corrispondono i punti $a'b'$, $a'c'$, $a'd'$, e così ai punti ba, bc, bd i punti $b'a'$, $b'c'$, $b'd'$, ecc.

Ora data in α una retta qualsiasi, non passante per uno dei punti A, B, C, D, essa incontrerà le AB, CD in due punti di cui si determineranno gli omologhi rispettivamente su $A'B'$,

Ora dato in α un punto qualsiasi P, non appartenente ad una delle rette a, b, c, d, lo proietteremo dai punti ab, cd e determineremo le rette omologhe di queste proiettanti, nei fasci

$C'D'$, la retta p' di α' congiungente questi punti sarà la corrispondente di p nell' omografia posta tra α, α'.

Dato invece in α un punto P. non appartenente ad uno dei lati del quadrangolo $ABCD$, si proietterà p. e. da A, B, e si determineranno i raggi omologhi a queste due rette proiettanti rispettivamente nei fasci A', B'; l' intersezione di tali raggi sarà il punto P' corrispondente a P nell'omografia in questione.

$a'b'$, $c'd'$; il punto P' intersezione di queste rette sara il corrispondente di P nell' omografia posta tra i piani α, α'.

Data invece in α una retta p, non passante per un vertice del quadrilatero $abcd$, la segheremo p. e. colle rette a, b, e determineremo i corrispondenti dei punti d' intersezione rispettivamente su a', b'; la retta p' che congiunge questi punti sarà la corrispondente della p nell' omografia.

Si voglia ora costruire tra due piani α, α', la reciprocità $\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$ in cui a 4 punti A, B, C, D, vertici d'un quadrangolo in α, corrispondono 4 rette $a, b, c. d$, lati di un quadrilatero in α'.

E anzitutto chiaro come i fasci A, B, C, D, risultino proiettivi rispettivamente alle punteggiate a, b, c, d. e così le punteggiate AB. CD, ecc. ai fasci ab, cd, ecc.

Ora dato in α un punto P non appartenente ad un lato del quadrangolo $ABCD$, si proietterà p. e. da A, B, e si determineranno i punti che corrispondono a queste due rette proiettanti rispettivamente su a, b; la retta p congiungente questi due punti sarà l' omologa di P nella correlazione posta tra i due piani. Data invece in α una retta p, non passante per A, B, C, D. la si segherà con AB, CD, poi si determineranno le rette corrispondenti ai detti punti nei fasci ab, cd; l' intersezione di tali rette sarà il punto P, omologo di p nella correlazione.

§ 46. **Forme di 2.ª specie prospettive.** — Se due piani (distinti) sono prospettivi (ossia riferiti mediante una proiezione da un punto esterno — § 43), la retta ad essi comune è (unita e) tutta costituita di punti uniti (corrispondenti a sè stessi). Correlativamente se due stelle distinte sono prospettive (proiettanti uno stesso piano), i piani passanti per la congiungente i centri delle due stelle sono uniti.

Viceversa si ha il teorema:

Se due piani distinti sono omografici e la retta ad essi comune è tutta costituita di punti uniti, i due piani sono prospettivi.

Se due stelle distinte sono omografiche ed il fascio ad esse comune è tutto costituito di piani uniti, le due stelle sono prospettive.

Riferiamoci all' enunciato di sinistra

Se α, α' sono i due piani, ed $a \equiv \alpha\alpha'$ la loro intersezione, ogni retta p di α incontra la corrispondente p' di α' nel punto $a\,p$, a cui corrisponde sè stesso.

Osservato ciò, sieno A, B due punti di α, e A', B' gli omologhi in α'. Le rette $A\,B$, $A'\,B'$ sono omologhe e però s' incontrano su a; segue che le AA', BB' giacciono in un piano e però sono incidenti. Dunque le rette congiungenti le coppie di punti omologhi di α, α' sono due a due incidenti, e poichè (evidentemente) esse non giacciono tutte in un piano, passano tutte per un punto (§ 8), segue che α, α' sono piani prospettivi. *c.d.d.*

§ 47. **Omologia.** — Si consideri l' omografia tra due piani sovrapposti, cioè in un piano α; un elemento che coincide col corrispondente dicesi unito.

Se si fissano come uniti quattro punti del piano α, di cui tre non appartengano ad una retta, per il § 45 risulta fissata *una* omografia in α, che è quella detta *identica*, in cui ogni elemento corrisponde a sè stesso.

Dunque in una omografia, non identica, del piano α non possono aversi quattro punti uniti, di cui tre non

appartenenti ad una retta, (o correlativamente) quattro rette unite di cui tre non appartenenti ad un fascio.

Una retta in α congiungente due punti uniti è unita per l'omografia, e risulta riferita proiettivamente a sè stessa, quindi se vi è sulla retta un terzo punto unito, tutti i punti di essa sono uniti (§ 21). correlativamente sono uniti tutti i raggi di un fascio cui appartengano tre rette unite.

Ne segue che: *Se in un'omografia piana (non identica) vi sono quattro elementi uniti dello stesso nome (punti o rette), vi è una forma di 1.ª specie tutta costituita di elementi uniti.*

Se nell'omografia vi è una punteggiata u di punti uniti, ogni retta incontra u in un punto che, essendo unito, deve appartenere alla corrispondente, ossia due qualunque rette omologhe s'incontrano su u. Viceversa: se, in una omografia piana. tutte le coppie di rette corrispondenti s'incontrano sopra una retta, questa retta è costituita di punti uniti, giacchè ogni punto di essa è centro di un fascio unito di raggi.

Correlativamente: La condizione necessaria e sufficente per l'esistenza di un fascio di raggi uniti, in una omografia piana non identica, è che tutte le coppie di punti omologhi sieno allineate con un centro fisso.

Due piani omografici sovrapposti, i quali abbiano:

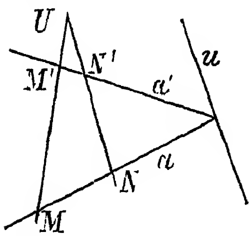
(tre punti uniti di una retta, e quindi) una punteggiata di punti uniti (u), *hanno anche un fascio di raggi uniti.*	*(tre rette unite per un punto, e quindi) un fascio di raggi uniti* (U), *hanno anche una punteggiata di punti uniti.*

Basta stabilire il teorema a sinistra, e si farà per esercizio la dimostrazione del teorema a destra, secondo il principio di dualità (cfr. § 10).

Sieno α, α' due piani omografici sovrapposti aventi la u come retta di punti uniti. Notiamo anzitutto che su u

s' incontrano tutte le coppie di rette omologhe a, a', invero il punto $a u$ essendo unito deve coincidere col punto $a' u$.

Mandiamo per u un piano α_1 diverso da α ($= \alpha'$) e proiettiamo α' su α_1 da un punto esterno A. Nasce tra



α_1, α un' omografia, per cui la u è retta di punti uniti, dunque (§ 46) una prospettività, vale a dire le coppie di punti omologhi $M M_1$, $N N_1$, ... sono tutte allineate con un punto fisso U_1. Torniamo a proiettare α_1 da A sul piano α'; le congiungenti le coppie di punti omologhi ($M M'$, $N N'$, ...) nella data omografia tra α, α', passeranno tutte pel punto U proiezione di U_1, questo punto sarà dunque il centro di un fascio di raggi uniti per l' omografia, di cui dovevasi mostrare l' esistenza.

La particolare omografia piana (fra due piani sovrapposti) in cui vi è una retta u di punti uniti ed un fascio U di rette unite, dicesi *omologia di asse* u *e centro* U.

La doppia proprietà fondamentale dell' omologia piana consiste in ciò che:

le rette omologhe s' incontrano sull' asse d' omologia. | *i punti omologhi sono allineati col centro d' omologia.*

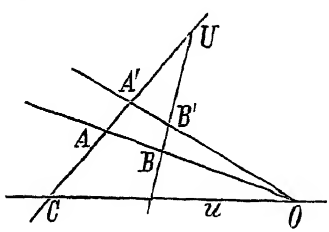
La proprietà di un' omografia piana di essere un' omologia è correlativa di se stessa.

Osservazione. — Non è escluso il caso particolare in cui il centro U dell' omologia appartenga all' asse; il teorema che segue ne prova l' effettiva possibilità.

Teorema. — *Esiste un' omologia piana avente un dato asse* u *e un dato centro* U, *in cui si corrispondono:*

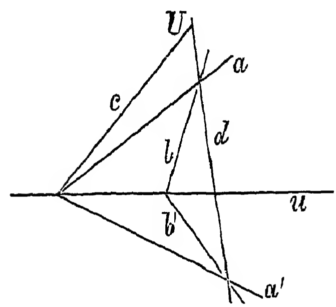
due punti omologhi A, A' *allineati col centro* U (diversi da esso e non appartenenti all' asse u). | *due rette omologhe* a, a' *che s' incontrino sull' asse* u (diverse dall' asse e non appartenenti al centro U).

Infatti tale omologia è l'omografia che (secondo il § 45) risulta determinata fissando che la retta u corrisponda a sè stessa e si abbia su u la proiettività identica, e che alla retta AA' corrisponda sè stessa e si abbia su di essa (come subordinata dell'omografia) la proiettività in cui sono dati i punti uniti U e $C \equiv AA'.u$ e la coppia di punti corrispondenti $A\ A'$.



Dato un punto B del piano, fuori della retta AA', per costruire il suo corrispondente B' si può procedere così: si determini il punto $O \equiv AB.u$ e quindi si seghino le rette OA' e BU; il punto d'intersezione appunto perchè esso è comune alla retta $A'O$ corrispondente ad AB, ed alla retta UB. è il punto B' cercato.

Infatti tale omologia e l'omografia che (secondo il § 45) risulta determinata fissando che i punti U ed aa' sieno uniti e si abbia (come subordinata dell'omografia), nel fascio U la proiettività identica, e nel fascio aa' la proiettività che ha per raggi uniti u e $c \equiv aa'.U$ e dove si corrispondono i raggi $a\ a'$.



Data una retta b del piano, non passante pel punto aa', per costruirne la corrispondente b' si può procedere così: si determini la retta $o \equiv ab.U$ e quindi si congiungano i punti oa' e bu; la congiungente, appunto perchè comune al fascio $a'o$, corrispondente ad ab, ed al fascio unito ub, è il raggio b cercato.

Dati il centro e l'asse di un'omologia piana ed una coppia di punti omologhi, si costruisce subito una coppia

di rette omologhe congiungendo i due punti con un punto dell'asse, e viceversa. così si può costruire la retta corrispondente ad una data quando l'omologia sia definita nel modo considerato a sinistra. Correlativamente si può costruire il punto corrispondente ad uno dato, nell'omologia individuata nel modo considerato a destra.

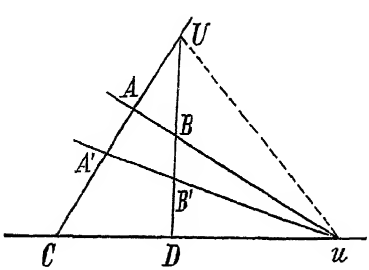
TEOREMA. — *Sieno* A A′, B B′ *due coppie di punti omologhi, ed* a a′, b b′ *due coppie di rette omologhe, in un' omologia piana di centro* U ($\equiv$ AA′. BB′) *ed asse* u ($\equiv$ aa′. bb′) *non appartenentisi fra loro; se* C $\equiv$ AA′. u, D $\equiv$ BB′. u, *sono le intersezioni delle rette* A A′, B B′ *con l'asse, e* c $\equiv$ a a′. U, d $\equiv$ b b′. U *sono le congiungenti i punti* aa′, bb′ *col centro, si ha:*

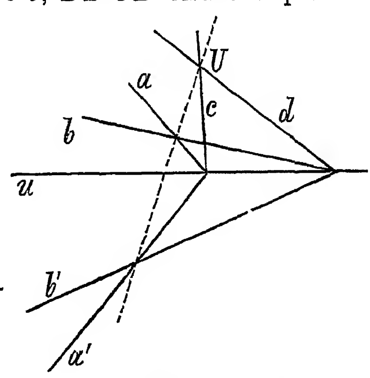
$$A A' U C \; \Pi \; B B' U D.$$
$$a a' u c \; \Pi \; b b' u d.$$
$$A A' U C \; \Pi \; a a' u c.$$

Infatti, se le rette AA', BB', coincidono, la relazione:

$$A A' U C \; \Pi \; B B' U D$$

è quella stabilita nel § 34: se le rette AA', BB' sono distinte, i due gruppi $A A' U C$, $B B' U D$ risultano pro-

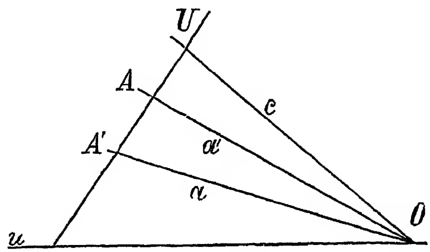




spettivi, perchè le rette omologhe $A B$, $A' B'$ s'incontrano in un punto dell'asse di omologia u. Correlativamente si stabilisce la relazione:

$$a a' u c \; \Pi \; b b' u d.$$

Ora se si considerano come rette omologhe $b . b'$ due rette AO, $A'O$ congiungenti A, A' con un punto O di u, si ha:



$$bb'du \;\Pi\; AA'UC,$$

da cui segue:

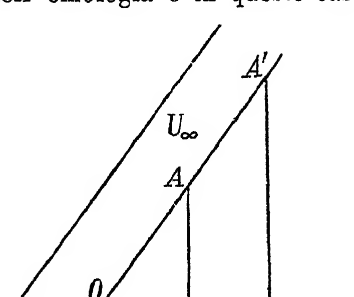
$$AA'UC \;\Pi\; aa'cu.$$

Osservazione*. — Il teorema stabilito si può anche esprimere dicendo che: in un'omologia l'invariante assoluto di ogni proiettività (iperbolica) subordinata sopra una retta unita (passante pel centro, cioè diversa dall'asse) è costante per ciascuna di queste rette; e (fissato convenientemente l'ordine dei quattro elementi di cui esso è il birapporto) è eguale all'invariante assoluto di ogni proiettività (iperbolica) subordinata in un fascio unito di raggi avente il centro sull'asse. Tale invariante, dato dal birapporto $(AA'\,UC)$, dicesi *invariante assoluto dell'omologia* Ove il centro dell'omologia appartenga all'asse, l'invariante assoluto diviene uguale ad 1.

Come casi particolari metrici dell'omologia notiamo:

1) L'*omologia affine*, in cui il centro è all'infinito e l'asse è una retta propria.

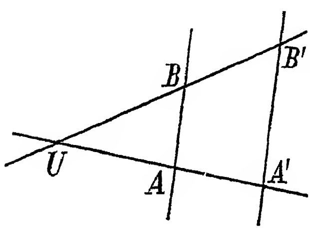
L'invariante assoluto dell'omologia è in questo caso il rapporto costante delle distanze di due punti omologhi A, A' dall'asse (dalla figura si vede che queste distanze sono proporzionali ad OA, OA', il cui rapporto è appunto l'invariante dell'omologia).



Tra le omologie affini si distinguono quelle *ortogonali*, in cui il centro si trova (all'infinito) sulla perpendicolare all'asse.

2) La *omotetia*, in cui l' asse è la retta all' infinito e il centro è un punto proprio.

In questo caso le distanze di due punti omologhi qualunque (allineati col centro) dal centro, stanno in un rapporto costante che è l' invariante assoluto dell' omologia (detto qui *rapporto d' omotetia*) Due rette corrispondenti sono parallele e, in quanto sono riferite nell' omotetia, risultano simili. Il rapporto di similitudine e ancora il rapporto costante d' omotetia.



Invero se A, B sono due punti, A', B' i loro corrispondenti, ed U il centro, si ha

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{UA}{U'A'}.$$

Si vede di qui come due figure piane corrispondenti in una omotetia (figure *omotetiche*) sieno *simili* nel senso della Geometria elementare; ma esse sono di più in una particolare relazione di posizione

3) La *traslazione* del piano su se stesso in una data direzione, cioè l' omologia che ha l' asse e il centro all' infinito.

Questi casi particolari dell' omologia forniranno ottima materia di esercitazioni.

§ 48. **Involuzione.** — In un' omografia piana (non identica) due elementi omologhi non si corrispondono in generale in doppio modo, cioè: se ad A corrisponde A', ad A' corrisponde un elemento in generale diverso da A. Quando in un' omografia piana ω tutte le coppie di elementi omologhi si corrispondono in doppio modo, in guisa che $\omega \equiv \omega^{-1}$, l' omografia (non identica) dicesi *involuzione*.

Se nell' omologia considerata nel paragrafo precedente si suppone che il gruppo $(AA'\,UC)$ (e quindi ogni altro

analogo) sia armonico, l'omologia (detta *armonica*) è un' involuzione

Viceversa, si consideri un' involuzione nel piano α Le rette che uniscono due punti omologhi come A, A' hanno per corrispondenti sè stesse (congiungenti A', A) e però vi sono infinite rette unite, così pure vi sono infiniti punti uniti, intersezioni delle coppie di rette omologhe.

Ma se in un' omografia non identica vi sono più di tre elementi uniti, tre di essi appartengono ad una forma di 1.ª specie tutta composta di elementi uniti (§ 47): dunque l' involuzione nel piano α è un' omologia. ma sopra ogni retta unita, diversa dall' asse, le coppie di punti corrispondenti formano un' involuzione iperbolica, onde (pel teorema del § 36) l' omologia è armonica.

La condizione necessaria e sufficiente affinchè una omografia piana sia un' involuzione è che essa sia una omologia armonica.

Osservazione*. — Nell' omologia armonica l' invariante assoluto è — 1.

Come casi particolari metrici dell' omologia armonica notiamo

1) *La simmetria (obliqua* o *ortogonale) rispetto ad un asse* (omologia affine involutoria)

2) La *simmetria rispetto ad un centro* (omotetia involutoria).

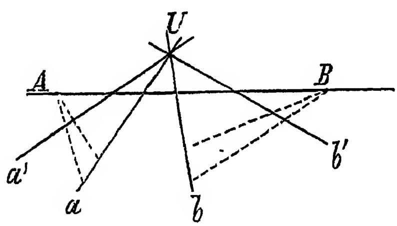
§ 49. **Elementi uniti di un' omografia piana.** — Si abbia un' omografia piana π, non omologica; e sia U un punto unito per tale omografia. Ad ogni retta a per U (che può supporsi non unita, giacchè π non è un' omologia) corrisponderà una retta a' pure per U, e le due rette a, a', risulteranno riferite proiettivamente dalla π in modo che U corrisponde a sè stesso, quindi esse risulteranno prospettive. Designeremo con A il centro della prospettività intercedente fra di esse.

Consideriamo ancora due rette omologhe distinte b, b' per U. esse risultano pure riferite prospettivamente dalla π; designeremo con B il relativo centro di prospettività.

Ora B sarà certo distinto da A: altrimenti ogni retta per A risulterebbe unita, poichè ai punti intersezioni di essa con a, b, corrisponderebbero le intersezioni rispettive di essa con $a'. b'$: la π sarebbe in tal caso una omologia di centro A. contro l' ipotesi fatta.

Due casi possono presentarsi:

1) È possibile scegliere convenientemente le nominate coppie di rette $a\,a'$, $b\,b'$, in modo che la retta $u \equiv B\,A$ non passi per U.



Allora la u è retta unita per l'omografia π giacchè ai due punti (distinti) in cui essa sega a, b, corrispondono rispettivamente i punti in cui essa sega a', b'.

Due altre rette $c. c'$ per U, omologhe in π, vengono dunque segate da u in due punti omologhi, e perciò la u contiene sempre il centro C della prospettività, subordinata dalla π, tra c e c'.

2) Comunque vengano scelte le coppie $a\,a'$, $b\,b'$. la retta $u \equiv A\,B$ passa per U.

Allora si può dire che la congiungente $u \equiv U\,A$. contiene il centro B della prospettività, intercedente fra due rette qualsiasi b, b', del fascio unito U, omologhe in π.

La retta u risulta unita anche in questo caso, perchè ai punti di essa che sono centri di prospettività tra coppie di rette omologhe per U, corrispondono in π centri di prospettività analoghe, che si trovano sulla retta stessa.

Concludiamo così:

In un' omografia piana non omologica ad ogni punto unito U *viene* **associata** *una retta unita* u, *che contiene*

tutti i centri delle prospettività intercedenti tra le rette omologhe distinte del fascio unito U.

Correlativamente. *Ad ogni retta unita* u *viene* **associato** *un punto unito* U, *pel quale passano gli assi delle prospettività intercedenti fra i fasci omologhi distinti che hanno i centri sulla retta unita* u

Si noti che il ragionamento svolto innanzi pel caso 1) ci prova che:

Se un' omografia piana, non omologica, possiede un punto ed una retta uniti che non si appartengono, la retta è associata al punto, ed il punto alla retta.

Dopo ciò è anche facile riconoscere che, in ogni caso:

La relazione di due elementi uniti associati per una omografia piana, non omologica, è reciproca; vale a dire: *se* u *è la retta unita associata al punto unito* U, U *è alla sua volta il punto unito associato ad* u.

La cosa è già stabilita pel caso in cui u ed U non si appartengono; poniamo dunque che la u, retta associata ad U, appartenga ad U; poniamoci cioè nel caso 2) considerato innanzi. Basterà mostrare che gli assi delle prospettività intercedenti fra due coppie di fasci omologhi, coi centri su u, passano per U.

A tal fine si consideri una retta a (non unita) del fascio U; sia a' la retta corrispondente, e sia a'' la corrispondente di a'. Le a', a'' passano per U; la a' risulta prospettiva alla a, la a'' alla a'; i centri A, A', delle due prospettività saranno punti omologhi della retta u. Ora ad ogni retta p per A corrisponde in π una retta p' per A'. la quale incontra a' nel punto omologo di $p\,a$, ossia nel punto stesso in cui la a' è segata dalla p.

Dunque a' è l' asse della prospettività intercedente in π tra i fasci omologhi A, A', coi centri su u.

Scegliendo invece di a un' altra retta b del fascio U, e considerando la sua retta corrispondente b', si ottiene un' altra coppia di fasci omologhi prospettivi coi centri

su u, tali che l'asse di prospettività b' passi per U. Resta così provato che U è il punto unito associato ad u. *c.d.d.*

Osservazione. — Se U ed u sono punto e retta uniti associati di un'omografia piana π, non omologica, una qualsiasi omologia T di centro U ed asse u trasforma in se stessa la π, in guisa che

$$T \pi T^{-1} = \pi.$$

Questa proprietà che può essere dimostrata per esercizio, serve anche a definire in modo caratteristico la relazione tra U ed u.

§ 50*. **Omografie piane particolari sotto l'aspetto metrico.** — Le omografie tra piani presentano notevoli casi particolari metrici, fra i quali (quando si tratta di piani sovrapposti), si trovano le particolari omologie già menzionate (§ 47).

Enunciamo i seguenti casi di particolari omografie fra due piani:

1) Le rette all'infinito si corrispondono. Si ha allora l'*omografia affine* o *affinità*. L'affinità fra due piani è determinata da tre coppie di elementi (propri) corrispondenti.

Nel caso generale, dell'omografia non affine, si ha in ciascun piano una retta *(limite)* propria, che ha come corrispondente nell'altro piano la retta all'infinito, allora ad un segmento rettilineo corrisponde un segmento infinito o finito secondochè il primo contiene o no un punto della retta limite. Nel caso dell'affinità, la retta limite, in ciascun piano, essendo impropria, ad ogni segmento finito corrisponde sempre un segmento finito.

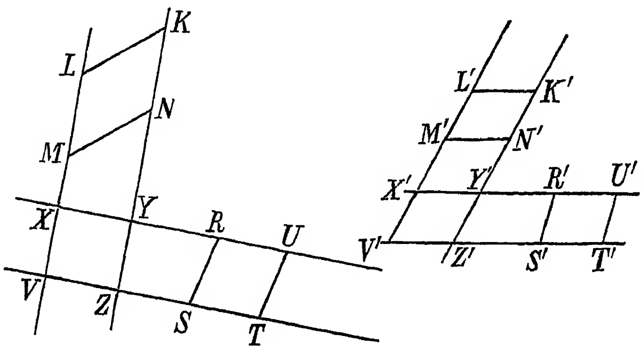
Nell'affinità tra due piani, due punteggiate omologhe risultano simili (§ 29).

Nell'affinità, a due rette parallele di un piano corrispondono sempre (nell'altro) due rette parallele e quindi

ad un parallelogrammo un parallelogrammo. Si può dimostrare che:

« Il rapporto delle aree di due parallelogrammi corrispondenti è costante ».

Sieno $LMNK$, $RUST$ due parallelogrammi, ed $L'M'N'K'$, $R'U'S'T'$ i parallelogrammi corrispondenti



in un' affinità fra due piani. Poniamo (come nella figura):

$$X \equiv LM \, . \, RU \qquad Y \equiv KN \, . \, RU$$
$$V \equiv LM \, . \, ST \qquad Z \equiv KN \, . \, ST$$

e consideriamo il parallelogrammo $XYZV$. Nell' altro piano gli corrisponde un parallelogrammo $X'Y'Z'V'$. ottenuto in modo analogo.

Ora le aree dei due parallelogrammi $LMNK$, $XYZV$ stanno fra loro nel rapporto dei lati LM, XV e così $RUST$, $XYZV$ stanno fra loro come ST, VZ, cioè si ha:

$$LMNK : XYZV = LM : XV$$
$$XYZV : RUST = VZ : ST.$$

Similmente:

$$L'M'N'K' : X'Y'Z'V' = L'M' : X'V'$$
$$X'Y'Z'V' : R'U'S'T' = V'Z' : S'T'.$$

D'altronde le rette proiettive LM, $L'M'$ in cui si corrispondono i punti all'infinito sono simili, e però·

$$LM : XV = L'M' : X'V';$$

ed analogamente:

$$VZ : ST = V'Z' : S'T'.$$

Si deduce che:

$$LMNK : RUST = L'M'N'K' : R'U'S'T',$$

ossia il rapporto:

$$LMNK : L'M'N'K'$$

delle aree di due parallelogrammi corrispondenti è costante. *c. d. d.*

Tenuto conto che due triangoli (finiti) corrispondenti in un'affinità tra due piani possono sempre riguardarsi come metà di due parallelogrammi corrispondenti, si deduce che anche il rapporto delle aree di due qualunque triangoli corrispondenti è costante. Ora dati (rispettivamente nei due piani affini) due poligoni (finiti) corrispondenti, essi si potranno decomporre in un ugual numero di triangoli corrispondenti, e però il rapporto delle loro aree sarà sempre uguale al rapporto delle aree di due triangoli (o parallelogrammi) corrispondenti.

Più generalmente, si abbia in un piano una *linea chiusa*, la quale possa considerarsi come limite di due serie convergenti di poligoni iscritti e circoscritti, in modo che risulti definita l'*area* da essa contenuta, come limite dell'area dei suoi poligoni iscritti (o circoscritti), all'impiccolire indefinito dei lati. Alla nominata linea chiusa corrisponderà nell'altro piano un'altra linea chiusa di cui l'area risulterà definita analogamente, ed il rapporto di queste aree corrispondenti sarà sempre uguale a quello di due qualunque poligoni o di due triangoli corrispondenti.

Così possiamo enunciare il teorema:

Nell'affinità fra due piani il rapporto delle aree contenute da due linee chiuse corrispondenti è costante.

Quando questo rapporto è uguale a 1, si ha l'*equivalenza affine*, in cui due aree omologhe sono sempre equivalenti.

L'affinità può considerarsi in particolare fra piani sovrapposti Un caso particolare di essa è l'omologia affine, già considerata.

2) Le rette all'infinito si corrispondono ed inoltre la data omografia trasforma l'involuzione assoluta dell'una nell'involuzione assoluta dell'altra, cioè fa corrispondere a coppie di punti coniugati nell'una, coppie di punti coniugati nell'altra. Ciò significa che le nominate rette all'infinito dei due piani risultano congruenti (§ 41), e perciò ad ogni angolo di un piano corrisponde sempre nell'altro piano un angolo uguale. Si deduce che ad ogni triangolo (proprio) corrisponderà un triangolo simile; più in generale saranno simili due qualunque figure corrispondenti in tale omografia, la similitudine essendo intesa nel senso della geometria elementare. A cagione di ciò, questa particolare omografia dicesi *similitudine*.

Si ha che·

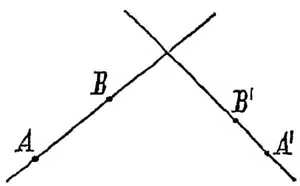
Il rapporto di due segmenti (finiti) corrispondenti in una similitudine fra due piani è costante; giacchè due coppie di punti e le loro corrispondenti danno luogo a due quadrangoli simili.

La proprietà anzidetta è caratteristica per la similitudine.

La similitudine può considerarsi fra due piani sovrapposti, ossia in un piano; allora si distingue la *similitudine diretta* e la *inversa*, secondo che è diretta o inversa la congruenza tra due fasci di raggi che in essa si corrispondono, cioè secondochè è diretta o inversa la congruenza subordinata dalla similitudine sulla retta unita impropria.

Esistono in un piano due similitudini, l'una diretta e l'altra inversa, che fanno corrispondere a due punti propri, due altri punti propri dati.

Infatti: sieno AA', BB' le due coppie di punti corrispondenti, fissate. Tra le punteggiate AB, $A'B'$ vi è una similitudine determinata in cui le due coppie si corrispondono nel modo assegnato (§ 29) Sopra la retta impropria vi sono due congruenze, una diretta ed una inversa, in cui al punto all'infinito della retta AB, corrisponde quello della $A'B'$ (§ 32). Ora ponendo sulla retta impropria una delle nominate congruenze, e ponendo tra le rette AB, $A'B'$ la similitudine menzionata, si stabilisce nel piano (§ 45) una similitudine ben determinata, che fa corrispondere A, A' e B, B'; questa è diretta o inversa secondo il senso della congruenza posta sulla retta impropria.

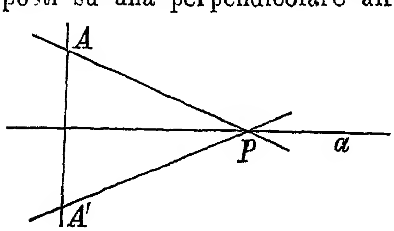


Una similitudine nel piano può, in particolare, essere omologica. Enumeriamo i varî casi che una similitudine omologica può presentare.

a) L'asse d'omologia è la retta impropria, ossia la similitudine è un'omotetia (§ 48).

b) L'asse d'omologia è una retta propria. Allora si ha una particolare omologia affine (§ 48). In primo luogo sulla retta impropria si ha una congruenza inversa, i cui punti uniti corrispondono a due direzioni ortogonali (§ 32); quindi l'omologia affine di cui si tratta è ortogonale D'altra parte due rette corrispondenti, intersecantisi sull'asse, debbono fare con questo angoli (corrispondenti) uguali.

Ora si considerino due punti corrispondenti A, A', posti su una perpendicolare all'asse a.



Scelto su a un punto qualsiasi P, si ha che le rette PA, PA' fanno angoli uguali colla a; segue di qui che A, A' distano ugualmente da a; dunque

l'omologia in questione (che si suppone non identica) sarà una simmetria ortogonale rispetto ad a. Viceversa una tale simmetria è una particolare similitudine inversa.

Riassumendo avremo:

Una similitudine omologica del piano (non identica) è un' omotetia oppure una simmetria ortogonale rispetto ad un asse.

Osservazione. — Il prodotto di due similitudini di un piano è una similitudine, diretta o inversa, secondochè le due similitudini date sono della stessa natura, o di natura diversa (ambedue dirette o ambedue inverse, oppure l' una diretta e l' altra inversa).

Infatti, eseguendo successivamente nel piano due similitudini, si ottiene un' omografia, che ha come retta unita la retta impropria, e subordina su di essa la congruenza prodotto delle congruenze subordinate dalle due similitudini date.

Di qui si può ricavare facilmente:

Ogni similitudine inversa di un piano, si può ottenere come prodotto di una similitudine diretta, e di una simmetria ortogonale rispetto ad un asse.

3) La similitudine può in particolare essere una *congruenza*, cioè due figure simili corrispondenti nei due piani possono essere (sempre) *congrue* od *uguali*. Ciò avviene se il rapporto di similitudine è l' unità.

La congruenza fra due piani può essere generata col movimento che sovrappone l' un piano all' altro, portando a coincidere due triangoli (uguali) corrispondenti; infatti la corrispondenza dei due triangoli determina la congruenza fra i due piani (che è una particolare affinità).

Trattandosi di una congruenza fra piani sovrapposti, ossia in un piano, si distingue ancora la *congruenza diretta* dall' *inversa*.

Il prodotto di due congruenze di un piano è una congruenza, diretta o inversa, secondochè le due congruenze date sono della stessa natura, o di natura diversa.

Cerchiamo di approfondire lo studio delle congruenze in un piano.

Enumeriamo dapprima le congruenze omologiche.

Fra i casi menzionati innanzi di similitudini omologiche, la simmetria ortogonale rispetto ad un asse (la quale può essere generata col ribaltamento del piano attorno all'asse) è sempre una congruenza.

L'omotetia può essere una congruenza in due casi; cioè quando il rapporto d'omotetia vale $+1$ o -1. Nel 1.° caso l'omotetia ha il centro sull'asse (§ 47), ossia sulla retta impropria; allora l'omotetia equivale ad una traslazione del piano su sè stesso. Nel 2.° caso l'omotetia è armonica (§ 48), ossia è una simmetria rispetto ad un centro.

Concludiamo, riassumendo, che:

Una congruenza omologica del piano è una traslazione, o una simmetria rispetto ad un un centro, o una simmetria ortogonale rispetto ad un asse.

Nei primi due casi si ha una congruenza diretta, nel 3.° caso una congruenza inversa.

Consideriamo ora, nel piano, una congruenza diretta non omologica.

Sopra la retta impropria resta subordinata una congruenza diretta la quale non ha punti uniti (§ 32), quindi il punto unito associato alla retta impropria (§ 31) è un punto proprio Indichiamo con O questo punto.

Nel fascio O resta subordinata una congruenza diretta, che può generarsi rotando il piano del fascio di un certo angolo α. Ora, poichè due punti corrispondenti debbono distare ugualmente dal punto unito O, eseguendo attorno ad O l'indicata rotazione, non solo ogni retta per O verrà sovrapposta alla corrispondente, ma anche un punto qualunque del piano (e quindi anche una retta qualunque) verrà a coincidere coll'elemento omologo Tenendo ancora presenti i due casi di congruenze omologiche dirette, si vede dunque che:

Nel piano, ogni congruenza diretta può essere generata da una rotazione attorno ad un centro fisso, oppure da una traslazione del piano su sè stesso.

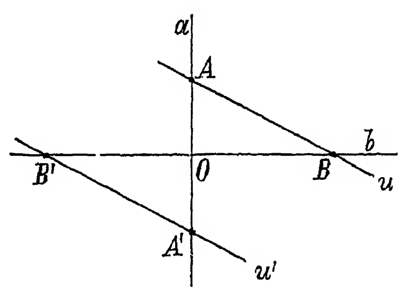
Se, trattandosi di una rotazione, l'angolo di cui ruota il piano uguaglia due angoli retti, la congruenza in questione è una simmetria rispetto al centro nominato.

Prendiamo ora ad esaminare, nel piano, una congruenza inversa non omologica.

Sopra la retta unita impropria si hanno ora due punti uniti A, B, corrispondenti a direzioni ortogonali (§ 32). Dico anzitutto che uno di questi è associato alla retta impropria.

La cosa si stabilisce per assurdo, nel modo seguente:

Se nessuno dei detti punti è associato alla retta impropria, si deve avere un punto unito proprio O, associato ad essa. Ora, nel fascio col centro in questo punto O, si avrà una congruenza inversa dotata di due rette unite ortogonali: a, b. Su ciascuna di queste due rette si avrà una congruenza dotata del punto unito O, quindi una congruenza inversa, equivalente ad una simmetria rispetto ad O. Si deduce da ciò che. ad ogni retta u corrisponderà la retta u' che sega a, b nei punti A', B', simmetrici di $A \equiv ua$ e di $B \equiv ub$, rispetto ad O; vale a dire: ad ogni retta u corrisponderà la simmetrica rispetto ad O. Ma, ciò significa che la congruenza in questione deve essere una simmetria rispetto ad O, contro il supposto che essa sia una congruenza inversa e non omologica.

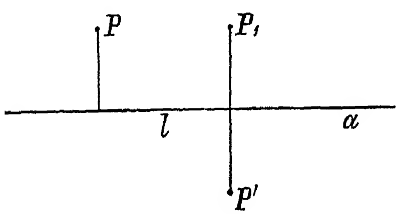


Stabilito così che il punto unito associato alla retta impropria è uno dei due punti uniti A, B, che appartengono ad essa, poniamo per esempio che sia A questo punto.

Allora al punto unito improprio B verrà associata una retta unita propria a, passante per A. Su a non vi sarà alcun punto unito proprio, e quindi la congruenza subordinata su di essa sarà diretta; essa equivarrà dunque ad uno strisciamento, di una certa lunghezza l, della a su sè stessa (§ 32), in un certo senso di a. Ecco ora come si può generare la data congruenza:

Cominciamo dall'eseguire una traslazione del piano, della lunghezza l, nella direzione di a e nel senso dello strisciamento considerato su di essa.

Mediante siffatto movimento, un punto qualsiasi P non viene sovrapposto al punto P' che gli corrisponde nella data congruenza (poichè questa congruenza non è una traslazione), ma va ad occupare una nuova posizione P_1 che si trova con P' sopra una perpendicolare ad a;



infatti la perpendicolare abbassata da P su a (retta del fascio unito improprio B) si muove parallelamente a sè stessa, ed il piede di essa su a descrive (nel debito senso) un segmento l, sicchè viene a sovrapporsi al piede della perpendicolare condotta su a da P'. Ora i punti P_1 e P' si corrispondono in una nuova congruenza (non identica) che è il prodotto della congruenza data e della effettuata traslazione: in questa nuova congruenza tutti i punti di a sono uniti, sicchè la congruenza stessa risulta (omologica ossia è) una simmetria ortogonale rispetto ad a. Basta dunque, dopo la traslazione nominata, eseguire ancora un ribaltamento rispetto ad a per sovrapporre ogni punto al corrispondente, nella data congruenza inversa.

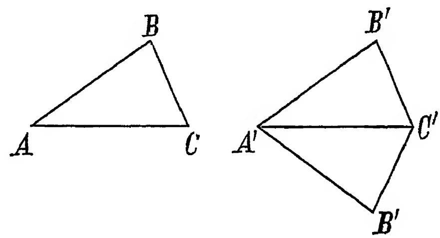
Perveniamo così alla conclusione:

Ogni congruenza inversa del piano si può generare eseguendo successivamente una traslazione del piano su

sè stesso nella direzione di un certo asse, ed un ribaltamento del piano attorno a quest' asse.

Basta soltanto un ribaltamento nel caso delle congruenze inverse omologiche (simmetrie).

OSSERVAZIONE 1.ª — Due figure uguali di un piano (per esempio due triangoli uguali ABC, $A'B'C'$). possono sovrapporsi l' una all' altra con un movimento del piano: ma può darsi che questo movimento possa effettuarsi facendo strisciare il piano su sè stesso, e può darsi invece che occorra di muovere la figura nello spazio, fuori del piano.



I due casi (che già si presentano nella Geometria elementare) vengono ora distinti a seconda della natura (diretta o inversa) della congruenza del piano, in cui le due figure possono considerarsi come corrispondenti; ed in relazione a ciò le figure stesse diconsi *direttamente* o *inversamente uguali.*

Si ricava ora da quanto precede che:

Due figure di un piano, direttamente uguali, si possono sovrapporre con una traslazione del piano, oppure con una rotazione di esso attorno ad un punto, invece due figure inversamente uguali possono sovrapporsi, eseguendo prima una traslazione del piano in una certa direzione, e poi un ribaltamento di esso attorno ad un asse, avente la direzione nominata.

OSSERVAZIONE 2.ª — Mediante le considerazioni di questo § si può concludere ormai che:

Tutte le proprietà metriche delle figure di un piano si possono riguardare come relazioni grafiche di esse colla retta impropria e coll' involuzione assoluta, i quali enti prendono complessivamente il nome *di assoluto del*

piano. Per stabilire questo teorema, osserviamo anzitutto che le proprietà metriche della Geometria piana si basano (oltrechè sulle nozioni grafiche), sulle nozioni fondamentali di *uguaglianza di angoli* e *di segmenti* Basta dunque esprimere, come una relazione grafica colla retta impropria e coll' involuzione assoluta, l'uguaglianza di due angoli e di due segmenti di un piano. Ora. l' uguaglianza di due angoli in un piano è definita dalla corrispondenza di due coppie di punti impropri in una congruenza sulla retta impropria. ossia in una proiettività su di essa che trasforma in sè stessa l' involuzione assoluta: per tal modo l' uguaglianza di due angoli si definisce subito nel modo voluto.

Vediamo di esprimere analogamente la relazione di uguaglianza tra due segmenti AB, $A'B'$ di un piano. Ciò può farsi in due modi. tenendo conto del fatto che i segmenti AB, $A'B'$ (fissata la corrispondenza degli estremi) si corrispondono in una congruenza diretta ed in una congruenza inversa. Tra i due modi scegliamo il più semplice. Il fatto che i segmenti AB ed $A'B'$ si corrispondono in una congruenza inversa del piano, si può esprimere dicendo che essi si corrispondono in un' omografia ottenuta come prodotto di una traslazione e di una simmetria ortogonale. Ora una traslazione è un'omologia coll' asse e il centro all' infinito: ed una simmetria ortogonale è un' omologia armonica coll' asse proprio, avente come centro il punto improprio coniugato al punto all' infinito dell' asse. nell' involuzione assoluta. Così la relazione di uguaglianza tra i segmenti AB, $A'B'$, viene espressa come una relazione grafica di essi colla retta impropria, e coll' involuzione assoluta del loro piano.

Osservazione 3.ª — Le cose dette intorno alle particolarità metriche delle omografie tra piani (propri), si possono ripetere analogamente per le stelle improprie.

Date due *stelle improprie* si avrà tra di esse una *affinità*, una *similitudine*, o una *congruenza*, secondoche

l' omografia determinata dalle stelle sopra due qualunque piani seganti (fuori di esse) è appunto un' affinità, o una similitudine, o una congruenza. In tutti e tre i casi i piani impropri delle due stelle si corrispondono; nel caso della similitudine i diedri corrispondenti sono uguali, e le larghezze delle strisce comprese fra coppie di raggi corrispondenti sono in un rapporto costante; questo rapporto e uguale ad 1 nel caso della congruenza.

In particolare si può considerare una congruenza in una stella impropria; e tale congruenza potrà essere diretta o inversa.

Nel 1.° caso essa equivale: o ad una traslazione di tutti i raggi della stella, parallelamente ad un piano; oppure ad una rotazione della stella attorno ad una retta fissa (propria).

Nel 2.° caso si ha nella stella un piano proprio unito (ma non rette unite proprie); e la congruenza si può ottenere eseguendo, prima una traslazione delle rette della stella parallelamente a quel piano, poi una simmetria ortogonale rispetto al piano stesso.

Esercizi. — Data. nel piano, una similitudine diretta (che non sia una congruenza), si scomponga nel prodotto di una rotazione attorno ad un centro *(centro di similitudine)* e di una omotetia.

Data, nel piano, una similitudine inversa (che non sia una congruenza), si scomponga nel prodotto di una omotetia e di una simmetria ortogonale rispetto ad un asse, il quale passi pel centro della nominata omotetia *(centro di similitudine)*.

§ 51. **Polarità nel piano.** — In generale, in una reciprocità tra due piani sovrapposti, due elementi omologhi non si corrispondono in doppio modo; cioe un punto A ha una retta omologa a ed a questa corrisponde nella data reciprocità un punto A', che è diverso da A. Per

convincersene basta osservare che si può assegnare una retta a, come corrispondente di un punto A e fissare che a due punti di essa corrispondano due rette per un punto A' diverso da A, dopo ciò resta ancora da fissare la retta omologa di un altro punto del piano per determinare la reciprocità (§ 45).

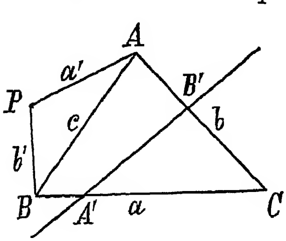
Una reciprocità in un piano, dove due qualunque elementi omologhi si corrispondono in doppio modo (involutoriamente), ossia una reciprocità equivalente alla sua inversa, dicesi un *sistema polare* o una *polarità;* un punto ed una retta che si corrispondono in una polarità piana si dicono *polo* e *polare* l'uno dell'altra.

La polarità in un piano può anche definirsi come una corrispondenza biunivoca fra i punti e le rette, tale che: *se la retta corrispondente (polare) di un punto* A *passa per un punto* B, *la corrispondente (polare) di* B *passa per* A.

Osservazione. — Correlativamente (nello spazio) si può definire *la polarità in una stella.*

L'effettiva esistenza di sistemi polari scaturisce dal seguente

Teorema — *Una reciprocità in un piano, è una polarità, se esiste un triangolo di cui ciascun vertice ha come retta corrispondente il lato opposto*



Anzitutto si noti che se in una reciprocità del piano ai tre vertici A, B, C corrispondono i lati rispettivamente opposti a, b, c, alla retta $a \equiv BC$ deve corrispondere il punto $A \equiv bc$, ecc.; cioè i vertici del triangolo ed i lati opposti si corrispondono in doppio modo. Ora, nella proiettività considerata, la punteggiata a è proiettiva al fascio A di raggi omologhi, in modo che segando tale fascio con la retta a si ottiene su questa una

proiettività; poichè in tale proiettività i punti B, C si corrispondono in doppio modo, essa è una involuzione, quindi i punti della retta a ed i raggi omologhi del fascio A si corrispondono in doppio modo. Altrettanto può dirsi pei punti delle rette b, c e le rette omologhe rispettivamente per B e C. In conseguenza anche ad ogni punto P, intersezione di due rette a', b', passanti rispettivamente per A, B, corrisponderà in doppio modo la retta omologa p, la quale vien definita come la congiungente i punti A', B' (posti rispettivamente sopra le rette a, b) che corrispondono alle rette a', b'. Perciò la reciprocità considerata è un sistema polare.

In un sistema polare piano i triangoli $A\,B\,C$, i cui vertici sono poli dei lati opposti (i quali costituiscono alla lor volta le polari dei nominati vertici), sono detti triangoli *coniugati* o *polari* (autoconiugati, autoreciproci, ecc.).

L'esistenza di infiniti triangoli coniugati in una polarità piana, sarà prossimamente dimostrata; risulterà quindi che il modo più generale di ottenere una polarità piana consiste nell'assegnare ad arbitrio un triangolo, che debba essere coniugato in essa, e fissare una retta non appartenente ad un vertice del triangolo come polare di un punto non appartenente ad alcun lato di esso.

§ 52. **Involuzione di elementi coniugati subordinata da una polarità in una forma di 1.ª specie.** — Dalla definizione di polarità scaturiscono immediatamente le proprietà correlative seguenti:

In una polarità piana

le polari dei punti di una retta passano pel polo di essa. Il fascio delle polari dei punti di una retta a, *risulta proiettivo alla pun-*

i poli delle rette passanti per un punto giacciono sulla polare del punto. La punteggiata dei poli delle rette d'un fascio A, *ri-*

teggiata (a) *dei loro poli* (§ 44).

Due punti A, B, di cui uno giace sulla polare dell' altro diconsi *coniugati* o *reciproci* nel sistema polare; per generalità si dice *coniugato di sè stesso* un punto appartenente alla sua polare.

sulta proiettiva al fascio (A) *delle loro polari* (§ 44).

Due tali rette a, b, di cui ciascuna contiene il polo dell' altra, diconsi *coniugate* o *reciproche*, nel sistema polare; per generalità si dice *coniugata di sè stessa* una retta appartenente al suo polo.

Se un elemento è coniugato d' un altro. anche il secondo elemento è coniugato del primo (§ 51).

In un triangolo coniugato i tre vertici, e rispettivamente i tre lati, sono due a due coniugati; viceversa un triangolo, in cui i tre vertici o i tre lati sieno due a due coniugati, è un triangolo coniugato nella polarità.

Se un punto A ed una retta a corrispondenti in una polarità del piano si appartengono:

nessun punto della retta a, diverso da A, appartiene alla sua polare (cioè sulla a vi è solo il punto A coniugato di sè stesso).

nessuna retta pel punto A, diversa da a appartiene al suo polo (cioè per A vi è solo la retta a coniugata di sè stessa).

Infatti, riferendoci alla proposizione di sinistra, nella proiettività subordinata dalla polarità tra il fascio A e la punteggiata a, i raggi omologhi ai punti di a passano per A, e sono diversi da a i raggi corrispondenti ai punti di a diversi da A; correlativamente si dica per l' enunciato a destra.

Teorema. — *In una polarità del piano non esiste*

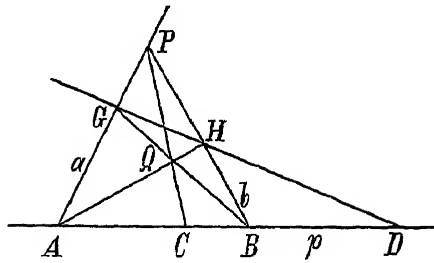
una retta tutta costituita di punti coniugati di sè stessi.

un fascio tutto costituito di raggi coniugati di sè stessi.

Basta dimostrare l' enunciato a sinistra.

Se sopra una retta p esistono due punti A, B (coniugati di sè stessi cioè) appartenenti alle rispettive polari

a, b, il polo P di p (comune ad a, b) è fuori di p. Ora si consideri un punto G della $a \equiv AP$, diverso da A, P; la sua polare (diversa da a) passa per il polo A di a e sega b in un punto H diverso da P e da B (polo di b); la polare di H è la retta BG, che ne congiunge due punti coniugati, quindi il punto $Q \equiv AH \cdot BG$ è coniugato di G e H,



e però la retta GH è la retta polare di Q.

Ora si considerino i punti $D \equiv p \cdot GH$ e $C \equiv p \cdot PQ$; questi punti sono coniugati nella polarità, giacchè la polare di D è appunto la retta PQ che unisce i poli di p, GH. Ma i nominati punti C, D sono anche coniugati armonici rispetto ad A, B, come risulta provato dall' esistenza del quadrangolo $PGQH$, e perciò essi sono certo distinti. Ecco dunque dimostrato che esistono su p due punti distinti, coniugati l'uno dell' altro nella polarità, cioè non coniugati di sè stessi.

Si consideri ora una qualsiasi retta p, che non contenga il proprio polo P. Ai punti di p corrispondono come polari le rette per P, e la corrispondenza è proiettiva. Segando con p il fascio P, si ottiene su p una proiettività, in cui si corrispondono le coppie di punti (di p) coniugati nella polarità. segue da quanto è stato detto innanzi che tale proiettività non è identica. Ma in essa due punti corrispondenti si corrispondono in doppio modo, dunque essa è una involuzione.

Si conclude così il

Teorema. — *In una polarità del piano*

sopra una retta, non contenente il suo polo, le coppie di punti coniugati formano

per un punto, non contenuto nella sua polare, le coppie di raggi coniugati

un' involuzione, che diremo *subordinata* dalla polarità.

formano un' involuzione, che diremo *subordinata* dalla polarità.

Perciò:

sopra una retta, non contenente il suo polo, vi sono due punti coniugati di sè stessi, separanti armonicamente le coppie di punti coniugati, o nessuno.

Invece (è stato già notato) *sopra una retta contenente il suo polo, vi è soltanto questo punto che sia coniugato di sè stesso.*

per un punto, non contenuto nella sua polare, vi sono due rette coniugate di sè stesse, separanti armonicamente le coppie di rette coniugate, o nessuna.

Invece per un punto che stia sulla sua polare vi è soltanto questa retta che sia coniugata di sè stessa.

Dopo ciò può vedersi quanto è stato precedentemente affermato, cioè che:

In una polarità del piano esistono infiniti triangoli coniugati.

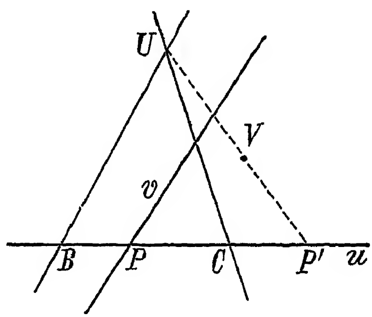
Invero per costruirne uno, si assuma ad arbitrio come suo vertice un punto A, non appartenente alla propria polare a, e sopra a due punti coniugati distinti B, C; il triangolo ABC è un triangolo coniugato nella data polarità. Si può sempre usare la costruzione correlativa.

Sia data una polarità piana. Se si pensa una retta punteggiata u, non contenente il suo polo U, come riferita prospettivamente al fascio di raggi che ha il centro nel detto polo U, l'involuzione di punti coniugati sulla retta u, viene proiettata nell'involuzione di raggi coniugati del fascio U, e ad ogni punto della retta u corrisponde come polare il raggio coniugato a quello che lo proietta da U. La relazione tra u ed U (retta e punto che non si appartengono) è una particolare proiettività che si può definire come prodotto di una prospettività tra u, U, e di una invo-

luzione su u (o in U); una tale relazione si può chiamare *involuzione tra la punteggiata ed il fascio.* Ora si ha il

Teorema. — *Data un' involuzione tra una punteggiata* u *ed un fascio di raggi* U, *esistono infinite polarità del piano in cui ai punti di* u *corrispondono le rette coniugate per* U

Infatti per individuare una siffatta polarità basta fissare che ad un punto V (diverso da U e fuori di u) corrisponda una retta v passante per il punto P di u coniugato al raggio UV (retta diversa da u e non contenente U).

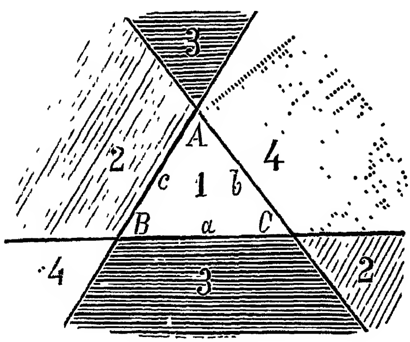


Invero si considerino due punti B, C di u (diversi da P e da $P' \equiv u \, . \, UV$), coniugati nell' involuzione su u, e sieno UC, UB le rette rispettivamente coniugate ad essi nel fascio U. Vi è una polarità ben definita (§ 51) che ha come triangolo coniugato UBC ed in cui v è la polare di V. Tale polarità fa corrispondere ai punti $B, P, \ldots.$ di u, rispettivamente le rette UC, $UV, \ldots.$ loro coniugate nell' involuzione inizialmente data tra la punteggiata u ed il fascio U.

§ 53. **Classificazione delle polarità piane.** — Una polarità piana π si può considerare individuata mediante un suo triangolo coniugato ABC e la polare p (non passante per A, B, C) di un punto P (fuori dei lati del triangolo); viceversa questi elementi che definiscono la π possono essere assunti ad arbitrio (§ 51).

Vediamo di riconoscere se nella polarità π esistono o no elementi coniugati di sè stessi, cioè punti e rette polari che si appartengono.

Giova a tal fine premettere alcune considerazioni relative ai triangoli. Un triangolo $A\,B\,C$ *separa* il piano in 4 *regioni* (distinte nella figura coi numeri 1, 2, 3, 4) costituite dai punti che sono fuori dei lati a, b, c e *separati* da questi lati; un segmento rettilineo congiungente due punti di diversa regione incontra un lato almeno del triangolo.

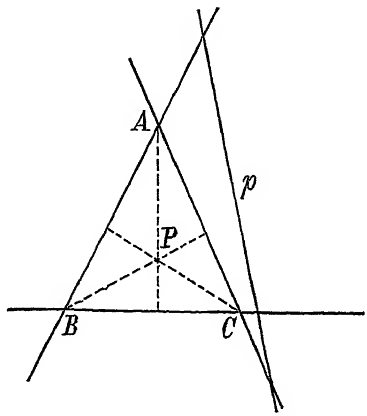


Questo fatto di natura intuitiva (rispetto all'intuizione grafica) si desumerebbe logicamente dal postulato V; si possono infatti distinguere le 4 regioni triangolari nominate partendo dalle due coppie di angoli formati dai lati che concorrono in due dati vertici del triangolo, p. e. in A, B, considerando i punti del piano che sono interni ad uno degli angoli A e ad uno degli angoli B, si *dimostra* che questi punti risultano interni ad uno determinato degli angoli formati dai lati del triangolo che concorrono nel terzo vertice C. In conseguenza si può anche dire, che due punti del piano (fuori dei lati del triangolo) appartengono alla stessa regione triangolare, se le loro proiezioni su ciascun lato appartengono allo stesso segmento terminato dai vertici.

Ma seguitiamo a ragionare, basandoci sull'intuizione grafica delle 4 regioni triangolari date da un triangolo nel piano, bastando aver rilevato esser ciò che diciamo una conseguenza logica dei postulati già introdotti, e non costituire affatto un nuovo dato dell'intuizione.

Anche le rette del piano non passanti per alcun vertice pel triangolo $A\,B\,C$, vengono *separate* dal triangolo in quattro *regioni*, potendo venire distinte le une dalle altre a seconda dei segmenti terminati dai vertici, in cui cadono le loro intersezioni coi lati. Ad ogni regione triangolare di

punti viene associata una regione triangolare di rette non aventi alcun punto interno a quella regione, ossia *esterne* ad essa. Le rette esterne ad una regione triangolare del piano *penetrano* nelle altre tre, cioè hanno un qualche punto interno ad esse.

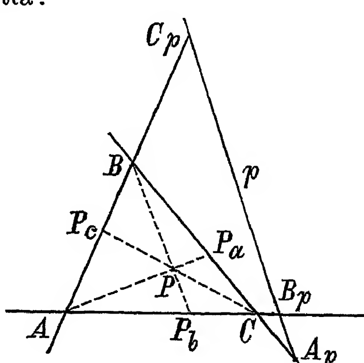


Una retta p che penetri nella regione triangolare $P.ABC$ del piano contenente il punto P, incontra *due* dei segmenti AB, AC, BC cui appartengono le proiezioni di P sui tre lati opposti fatte rispettivamente da C, B, A, e *non* incontra il terzo; questo terzo lato separa la regione triangolare $P.ABC$ da quella a cui è esterna la retta p.

Ciò posto, sia dato nel piano un triangolo ABC, e sia P un punto interno ad una delle quattro regioni in cui esso divide il piano. si può fissare una polarità π che abbia come triangolo coniugato ABC, facendo corrispondere al punto P una qualunque retta non passante per A, B, C. Ora questa retta:

1.° può essere esterna alla regione triangolare $P.ABC$ in cui cade P;

2.° può al contrario penetrare nella detta regione $P.ABC$.



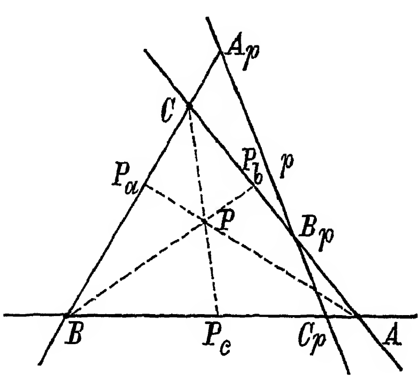
Si designino rispettivamente con P_a, P_b, P_c, le proiezioni di P, fatte da A, B, C, sui lati opposti a, b, c del triangolo ABC, e con A_p, B_p, C_p, le intersezioni dei detti lati a, b, c, colla retta p.

Sulla retta a si ha una involuzione di punti coniugati subordinata dalla polarità π, che viene individuata dalle coppie $B\,C$, $P_a\,A_p$; due involuzioni analoghe si hanno rispettivamente su b, c.

Nel 1.° caso le tre involuzioni di punti coniugati su a, b, c sono ellittiche (concordi), perchè si separano le due coppie $B\,C$, $P_a\,A_p$, ecc., si separano in conseguenza due qualunque coppie di punti coniugati su ciascuna delle rette a, b, c, ed in particolare una qualunque di queste coppie separa la coppia di vertici del triangolo ABC appartenente al rispettivo lato. Perciò, in primo luogo, non vi sono su a, b, c, dei punti coniugati di sè stessi; inoltre, considerato un punto qualunque P' (diverso da B, C) e la sua polare p', si ha che le proiezioni di P fatte da A, B, C, rispettivamente su a, b, c, prese insieme alle intersezioni rispettive di queste tre rette con p' separano le coppie di vertici del triangolo ABC, sicchè la polare p' di P' è sempre esterna alla regione triangolare $P'.ABC$ che contiene P'.

Dunque, nel 1.° caso la polarità non possiede alcun punto (appartenente alla propria polare, cioè) coniugato di sè stesso.

Nel 2.° caso la retta p incontrerà due dei tre segmenti AB, AC, BC, cui appartengono rispettivamente P_c, P_b, P_a, e non il terzo; supponiamo per esempio che non incontri $B\,P_a\,C$. Abbiamo allora su a le coppie di punti coniugati (in π) $B\,C$, $P_a\,A_p$, che si separano: su b, c rispettivamente le coppie $A\,C$, $P_b\,B_p$ e $A\,B$, $P_c\,C_p$ che non si separano: quindi delle tre involuzioni di punti coniugati che la π



determina su a, b, c, una è ellittica e due sono iperboliche. Queste ultime ammettono ciascuna due punti doppi, coniugati di sè stessi.

Possiamo dunque enunciare il risultato:

Le polarità del piano si dividono in due categorie:

1.ª Le polarità uniformi, prive di elementi coniugati di sè stessi. Esse sono caratterizzate dal fatto che ogni punto del piano, il quale sia interno ad una regione triangolare determinata da un triangolo coniugato, ha la sua polare esterna alla detta regione

2.ª Le polarità non uniformi, dotate di elementi coniugati di sè stessi. Esse sono caratterizzate dal fatto che ogni punto del piano, il quale sia interno ad una regione triangolare determinata da un triangolo coniugato, ha la sua polare penetrante nella stessa regione triangolare.

Le polarità uniformi traggono il loro nome dal fatto che ogni involuzione di elementi coniugati in esse sopra una retta od in un fascio di raggi, è concorde (ellittica).

Il contrario accade *per le polarità non uniformi*, anzi in questo caso, *delle tre involuzioni di punti coniugati, che si hanno sopra i tre lati d'un triangolo coniugato, due sono discordi (iperboliche) ed una concorde (ellittica), e correlativamente.*

§ 54. * **La polarità ortogonale nella stella.** — Le proposizioni grafiche stabilite per le omografie e le correlazioni piane, in particolare quelle relative alle polarità del piano, si riportano subito alla stella mediante il principio di dualità, o eseguendo una proiezione.

Fra le polarità di una stella propria si distingue. dal punto di vista metrico, la polarità (uniforme) in cui ad ogni retta della stella corrisponde il piano ortogonale.

Che tale corrispondenza sia effettivamente una polarità, si verifica subito, perchè, se u, v, sono due raggi (orto-

gonali) della stella, tali che il piano ortogonale ad u passi per v, anche il piano ortogonale a v passa per u (§ 51).

Ora la polarità menzionata, prende il nome di *polarità ortogonale* della stella.

La considerazione della polarità ortogonale di una stella trae la sua importanza dalle proprietà che andiamo a stabilire.

Si abbiano due stelle (proprie) omografiche O, O', e suppongasi che alla polarità ortogonale dell'una corrisponda, nell'omografia, la polarità ortogonale dell'altra; vale a dire, ad una retta e ad un piano per O che sieno ortogonali, corrispondano per O' una retta ed un piano del pari ortogonali. Due qualunque fasci di raggi (o di piani) corrispondenti nelle due stelle, risultano riferiti proiettivamente in modo che alle coppie di elementi ortogonali dell'uno corrispondano le coppie di elementi ortogonali dell'altro; i detti fasci sono dunque congruenti (§ 29). Perciò l'omografia tra O, O' fa corrispondere all'angolo di due raggi o di due piani di una stella, un angolo uguale nell'altra stella. In conseguenza ad ogni angolo poliedro col vertice O, corrisponde (per l'omografia) un angolo poliedro col vertice O', avente gli angoli (diedri) e le faccie (angoli) ordinatamente uguali ai corrispondenti angoli e faccie del primo; due angoli poliedri corrispondenti nelle due stelle sono dunque congruenti od uguali (§ 9). Perciò l'omografia fra le due stelle prende il nome di *congruenza*.

Ora si eseguisca un movimento della stella O, il quale sovrapponga un angolo tetraedro di vertice O, al corrispondente angolo tetraedro di vertice O'. Questo movimento produce fra le due stelle un'omografia, che non può differire da quella definita mediante la corrispondenza dei due angoli tetraedri. Si conclude così che il detto movimento sovrappone ogni retta o piano della stella O, all'elemento della stella O' che gli corrisponde nella data congruenza.

Possiamo dunque, riassumendo, enunciare il teorema:

Un' omografia fra due stelle proprie, la quale faccia corrispondere le polarità ortogonali di esse, è una congruenza; essa può generarsi con un movimento, che sovrapponga l'una stella all' altra, portando a coincidere gli elementi corrispondenti.

Consideriamo due stelle (proprie) O, O'; e per O si abbiano due rette a, b, non ortogonali, per O' due rette a', b', formanti un angolo $a'b' = ab$.

Si può sovrapporre, con un movimento, la stella O alla O', facendo coincidere le rette a, a', e le b, b', in due modi; si ottengono così due congruenze facenti corrispondere le dette coppie di elementi, e quindi le rette dei fasci ab, $a'b'$, in un modo determinato (§ 32); l'una congruenza si deduce dall' altra con una simmetria rispetto al piano $a'b'$, ossia con una rotazione di due angoli retti attorno alla perpendicolare, in O', al detto piano Abbiamo dunque, riunendo al risultato ottenuto quello che se ne deduce per dualità, che.

Tra due stelle proprie si possono porre due congruenze, in modo che a due rette (o due piani), non ortogonali dell' una, corrispondano due rette (o rispettivamente due piani) formanti un angolo uguale nell' altra.

In particolare i resultati precedenti, che concernono due stelle, si possono applicare al caso in cui queste sieno sovrapposte; si potrà allora parlare di congruenza in una stella (omografia che trasforma in sè stessa la polarità ortogonale). E due coppie di raggi ab, $a'b'$, di una stella, formanti angoli uguali non retti, determineranno nella stella due congruenze in cui a, a' e b, b' si corrispondono.

Una congruenza in una stella può essere omologica. In tal caso si avranno infinite rette unite componenti un fascio di raggi, e infiniti piani uniti, passanti per la perpendicolare a al piano α del detto fascio. Ad ogni

retta corrisponderà la simmetrica rispetto ad a, o, ciò che è lo stesso, la simmetrica rispetto al piano α.

Si conclude dunque:

Una congruenza omologica, in una stella propria, è una simmetria rispetto ad un asse (e rispetto al piano ortogonale), e può essere generata colla rotazione di due angoli retti della stella attorno all' asse.

Osservazione 1.ª — L' uguaglianza di due angoli o diedri in una stella risulta definita come una relazione grafica di essi colla polarità ortogonale. Così tutte le proprietà metriche della Geometria della stella si ottengono da relazioni grafiche delle figure colla polarità ortogonale, che perciò si chiama « *assoluto* » della stella, come pel piano l' insieme della retta impropria e dell' involuzione assoluta di questa retta.

Osservazione 2.ª — Si potrà definire come *polarità assoluta* del piano improprio e *dello spazio*, la polarità che si ottiene sul piano improprio segando la polarità ortogonale di una qualsiasi stella propria, vale a dire la corrispondenza per ortogonalità fra direzioni e giaciture. Si potrà chiamare *congruenza* ogni omografia del piano improprio, la quale trasformi in sè stessa la polarità assoluta.

In una congruenza del piano improprio a due punti collegati a direzioni formanti un certo angolo, corrisponderanno due punti (formanti una coppia congruente, cioè) collegati a direzioni formanti un angolo uguale, ecc.

Nel piano improprio vi saranno due congruenze in cui si corrispondono ordinatamente due coppie congruenti di punti ecc.

§ 55. **Estensione della legge di dualità nelle forme di 2.ª specie.** — È stato dimostrato nel § 9 che tutti i teoremi della geometria del piano o della stella, dedotti dai postulati fondamentali (I II III IV V VI) della Geometria

proiettiva, vengono associati a coppie secondo la legge di dualità del piano, o rispettivamente, della stella. I teoremi così dedotti, come si è osservato nel § 6, concernono sempre proprietà grafiche delle figure. Mediante la correlazione nel piano o nella stella possiamo estendere la legge di dualità stabilita, dandone una nuova dimostrazione *a posteriori*.

Riferiamoci nel ragionamento al caso del piano. Si abbia dunque nel piano una figura M, dotata di certe proprietà grafiche. Queste si potranno enunciare dicendo che:

1) certi punti di M appartengono a certe rette di M (o viceversa);

2) certi punti sopra una retta (o certe rette per un punto) di M si susseguono.

Operiamo nel piano una correlazione, nella quale alla figura M corrisponda una figura M'; allora:

1) ai punti ed alle rette di M che si appartengono, corrispondono rispettivamente rette e punti di M' che si appartengono;

2) a punti susseguentisi sopra una retta di M, corrispondono rette (formanti un gruppo proiettivo a quello dei detti punti e quindi) susseguentisi per un punto di M'; similmente a rette susseguentisi per un punto di M, corrispondono punti susseguentisi sopra una retta di M'.

Dunque per ogni figura piana M, possedente certe proprietà grafiche, esiste una figura piana (correlativa) M', che gode delle proprietà correlative nel piano. Si può enunciare il risultato ottenuto, includendo anche il caso della stella, che si tratta analogamente:

In una forma di 2.ª specie, ad ogni figura si può associare una figura correlativa, di cui le proprietà grafiche vengono dedotte da quelle della prima mediante uno scambio di elementi (punto e retta, o retta e piano).

Questo enunciato costituisce una vera *estensione della legge di dualità* per le forme di 2.ª specie, poichè tale

legge risulta ora stabilita per tutte le proprietà grafiche, indipendentemente dal modo con cui esse sono stabilite, e quindi anche se nella loro dimostrazione si fossero impiegate nozioni metriche

La legge di dualità nelle forme di 2ª specie può anche essere estesa ulteriormente a tutte le proprietà *proiettive* delle figure, chiamando *proiettive* quelle proprietà che non vengono alterate per un' omografia (cioè che si traducono in analoghe proprietà delle figure trasformate). Fra queste proprietà proiettive sono tutte le proprietà grafiche, ma anche talune metriche, come il valore del birapporto di 4 elementi in una forma di 1.ª specie.

Riferendoci per esempio al piano, notiamo che una qualsiasi omografia π viene trasformata in un' omografia $T\pi T^{-1}$ da una correlazione T, (mentre viceversa questa 2.ª omografia vien trasformata nella 1.ª dall' omografia inversa T^{-1}); quindi se M è una figura del piano e M' la corrispondente in T, ad ogni proprietà di M che non si alteri per una qualunque omografia eseguita su M, corrisponderà una proprietà di M' che non sarà alterata da una qualsiasi omografia del piano; e tale proprietà di M' verrà dedotta dalla supposta proprietà di M collo scambio degli elementi: punto e retta. Così concludiamo in generale che:

La legge di dualità nelle forme di 2.ª specie sussiste per tutte le proprietà proiettive delle figure in esse contenute.

Ma questa seconda estensione della legge di dualità non dà *sostanzialmente* nulla di più della precedente. Infatti, tutte *le proprietà proiettive* delle figure appartenenti a forme di 2.ª specie *si possono enunciare come proprietà grafiche* di esse. Se, invero, si tratti di una proprietà proiettiva di una certa figura M. la quale includa qualche nozione metrica, questa proprietà potrà tuttavia

enunciarsi come una relazione grafica di M coll'assoluto I della forma di 2.ª specie, ossia come una proprietà grafica della figura composta $M+I$; ma poichè tale proprietà deve conservarsi per una qualunque proiettività, che pure non conservi I, essa riesce in definitiva indipendente da I, ossia riesce una proprietà grafica della figura M in sè stessa, equivalente alla proprietà metrico-proiettiva proposta.

Le considerazioni che precedono conducono anche a chiarire ciò che può dirsi intorno all'applicabilità della legge di dualità nella Geometria metrica delle forme di 2.ª specie.

Quando una proprietà metrica P di M viene enunciata come una proprietà grafica di $M+I$, si ottiene una proprietà correlativa P' della figura $M'+I'$ ottenuta aggiungendo alla M', correlativa di M, un ente I' correlativo dell'assoluto. Ora, se la data forma di 2.ª specie è un piano, l'ente I' e una involuzione di un certo fascio di raggi, e, comunque sia determinato, non ha alcuna significazione metrica; per conseguenza la M' ammetterà la proprietà correlativa di quella P attribuita ad M, soltanto nel caso che la proprieta P' di $M'+I'$ riesca indipendente da I', vale a dire se la P di $M+I$ è indipendente da I, ossia se essa è una proprietà (equivalente ad una proprietà grafica, e quindi) proiettiva di M; in caso opposto la proprietà P' di $M'+I'$ non si potrà in alcun modo riguardare come una proprietà della figura M' considerata in sè stessa.

Se invece la forma in questione è una stella, l'ente I' sarà una polarità di essa, e potrà determinarsi in guisa che sia ancora (come I) la polarità ortogonale; perciò la proprietà P' di $M'+I'$ sarà in ogni caso una proprietà di M' in relazione all'assoluto, ossia potra riguardarsi come una proprietà metrica della M' in sè stessa, proprietà correlativa di quella (P) attribuita ad M.

Concludiamo dunque che:

Nel piano, la legge di dualità non vale in generale per le proprietà metriche, ma soltanto per quelle che sono proiettive.

Nella stella, la legge di dualità vale anche per tutte le proprietà metriche.

Osservazione. — L'estensione della legge di dualità relativa alle forme di 2.ª specie è stata innanzi stabilita *a posteriori*. facendo uso di una reciprocità. E così ci siamo dispensati dall'esaminare la natura del ragionamento che ci conduce ad un teorema di cui si vuole il correlativo; sia pure che questo ragionamento sia fondato sopra nozioni metriche e sui postulati relativi a tali nozioni.

Ma si potrebbe stabilire tale estensione anche *a priori*. osservando che i postulati della Geometria metrica del piano o della stella, interpretati graficamente in relazione all'assoluto, fornirebbero teoremi della Geometria proiettiva, dimostrabili in base ai soli postulati di essa.

CAPITOLO IX

Le coniche

§ 56. **Definizioni.** — Data nel piano una polarità non uniforme, vi sono sempre

tre categorie di rette:

1) rette (appartenenti al proprio polo) contenenti un punto coniugato di sè stesso;

2) rette (non appartenenti al proprio polo), su cui l' involuzione di punti coniugati è iperbolica, cioè rette che contengono due punti coniugati di sè stessi;

3) rette (non appartenenti al proprio polo) su cui l' involuzione di punti coniugati e ellittica, cioè rette che non contengono alcun punto coniugato di sè stesso.

tre categorie di punti:

1) punti (appartenenti alla propria polare) per cui passa una retta coniugata di sè stessa;

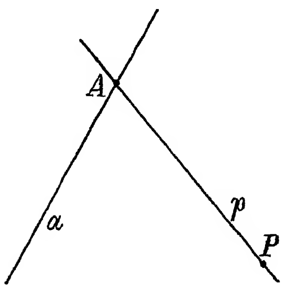
2) punti (non appartenenti alla propria polare), per cui l' involuzione delle rette coniugate è iperbolica, cioè punti per cui passano due rette coniugate di sè stesse;

3) punti (non appartenenti alla propria polare) per cui l' involuzione delle rette coniugate e ellittica, cioè punti per cui non passano rette coniugate di sè stesse.

Se in una polarità piana esiste un punto appartenente alla propria polare, cioè *un elemento* (di ciascuna delle due specie) *coniugato di sè stesso:*

esistono infiniti punti coniugati di sè stessi.

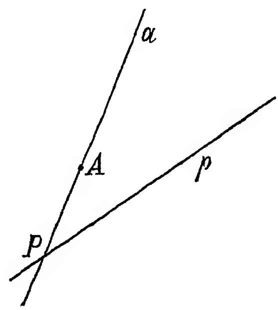
Invero sia A un punto coniugato di sè stesso ed a



la sua polare. Ogni retta p per A, diversa da a, ha il suo polo su a, quindi non è coniugata di sè stessa; perciò essa appartiene alla categoria *3)* e contiene *un altro* punto P coniugato di sè stesso. Variando la retta per A, varia il punto P, sicchè l'insieme dei punti coniugati di sè stessi, così generato, appare come una *linea* (luogo di un punto mobile) nel senso intuitivo della parola.

esistono infinite rette coniugate di sè stesse.

Infatti sia a una retta coniugata di sè stessa ed A



il suo polo. Ogni punto P su a, diverso da A, ha la sua polare per A, quindi non è coniugato di sè stesso; perciò esso appartiene alla categoria *3)* e per esso passa *un'altra* retta p coniugata di sè stessa. Variando il punto P su a, varia la retta p, sicchè l'insieme delle rette coniugate di sè stesse, così generato, appare come un *inviluppo* (successione delle posizioni di una retta mobile) nel senso intuitivo della parola.

L'insieme dei punti e delle rette coniugati di sè stessi dicesi **conica fondamentale** *della polarità.*

La conica, considerata semplicemente come insieme dei suoi punti, si chiama *conica luogo*.

Le rette del piano che appartengono alla 1.ª o alla 2.ª categoria in relazione alla polarità, hanno comuni rispettivamente *uno* o *due* punti colla conica luogo, e sono dette rispettivamente *tangenti* o *secanti* di essa. Le rette della 3.ª categoria non hanno alcun punto comune con la conica e sono dette *esterne* ad essa.

La denominazione di « tangente » alla conica, si giustifica facendo vedere che essa corrisponde alla nozione intuitiva di tangente ad una linea piana, e ciò nel seguente modo:

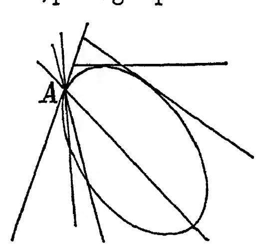
Se A e un punto della conica, ogni retta per A incontra la conica in un altro punto (ed è una secante), ad eccezione della polare di A che è la tangente in A; questa appare dunque come *limite* di una secante variabile, di cui l'ulteriore punto d'incontro colla conica si

La conica, considerata semplicemente come insieme delle sue rette, si chiama *conica inviluppo*.

Per un punto del piano, secondochè appartiene alla 1.ª o alla 2.ª categoria in relazione alla polarità, passano rispettivamente *una* o *due* rette della conica inviluppo; nel 1.° caso il punto si dice *punto di contatto* di quella retta, nel 2.° caso il punto si dice *esterno* alla conica. Per un punto della 3.ª categoria non passano rette della conica; un tal punto si dice *interno*.

La denominazione di « punto di contatto » di una retta colla conica, si giustifica riattaccandola ad una nozione intuitiva generale, che si riferisce agli inviluppi:

Se a è una retta della conica, per ogni punto di essa



passa un' altra retta della

avvicini indefinitamente ad A, o, come si suol dire (usando una locuzione imprecisa ma espressiva), quale *retta che unisce due punti infinitamente vicini della linea.*

conica, tranne che per il polo di a che è il *punto di contatto*, questo appare dunque come il *punto d'incontro di due rette infinitamente vicine dell' inviluppo*, cioè come *limite* dell'intersezione di a con un'altra retta dell' inviluppo che si avvicini indefinitamente ad essa.

Le rette di una conica appariscono come tangenti della conica, considerata come luogo dei suoi punti, e così i punti della conica appariscono come punti di contatto delle corrispondenti rette dell'inviluppo (tangenti).

Dunque: *La conica appare come l' insieme dei punti e delle tangenti di una linea piana.*

Osservazione. — Questa linea *separa il piano in due regioni*, una delle quali, quella dei punti che abbiamo denominato esterni, è descritta dalle tangenti. A questa separazione fa riscontro per dualità la separazione delle rette non tangenti in « secanti » ed « esterne ».

Volendo acquistare una prima idea approssimativa della forma di una conica, immaginiamo di seguire coll' occhio la sua genesi, partendo da un punto A di essa.

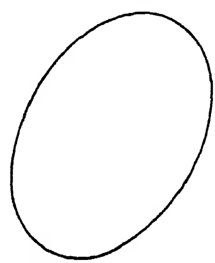
I punti della linea vengono a corrispondere alle rette per A; al muoversi di una retta per A, che descriva il fascio A, cominciando dalla posizione della tangente, corrisponde il muoversi di un punto, che partendo da A descrive tutta la linea tornando in A. Dunque la conica appare come una *linea chiusa*, ed è anche facile persuadersi che le due regioni di punti esterni ed interni rispetto ad essa, hanno l' ordinario significato intuitivo, poichè una tangente variabile lascia sempre da una banda la conica e non invade mai la regione dei punti interni. Questa deduzione però non è da riguardarsi come rigo-

rosamente dimostrata; ne abbiamo dato cenno solo per aiutare fin d' ora l' intuizione delle coniche, ma ci riserviamo di dimostrare più tardi, con tutto rigore logico, i teoremi cui essa darebbe luogo.

*Abbiamo detto che la conica appare come una linea chiusa; avvertiamo subito che ciò deve intendersi relativamente all' intuizione grafica.

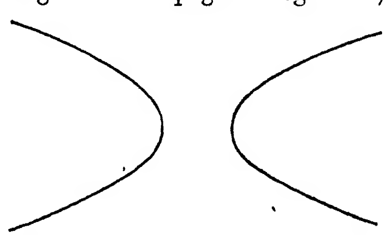
Dal punto di vista metrico la cosa appare diversa, giacchè può darsi che il punto mobile descrivente la linea assuma (una o due volte) la posizione di un punto improprio. Se si vuole formarsi una intuizione metrica della forma di una conica si devono dunque distinguere anzitutto tre specie di coniche:

1) La *ellisse*, per cui la retta all' infinito e esterna, ha la forma di un ovale chiuso.



2) L' *iperbole*, per la quale la retta all' infinito è secante, è composta di due rami aperti che si riattaccano in due punti all' infinito, cioè si vanno indefinitamente accostando (da parti opposte) a due rette fisse « *gli asintoti* », tangenti nei punti all' infinito.

3) La *parabola*, (vedi figura alla pagina seguente) per la quale la retta all' infinito è tangente, è formata da un solo ramo aperto, che non si avvicina indefinitamente a nessuna retta propria, e, si può dire, si chiude nel punto all' infinito.

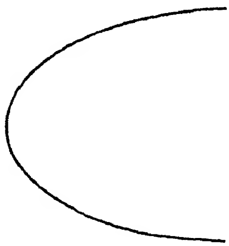


Con una conveniente proiezione le coniche delle tre specie (metriche) enumerate, si possono scambiare l' una nell' altra.

Questo fatto aiuta a concepire graficamente come unica la forma delle tre linee. L' iperbole appare come un

ovale spezzato dalla retta all'infinito; la parabola come un ovale allungato indefinitamente da una parte

Il principio di dualità nello spazio ci conduce a considerare certe figure della stella, correlative delle coniche



che si ottengono anche come proiezioni di esse, vale a dire « *i coni quadrici* ». Un cono quadrico si può definire come l'insieme delle rette e dei piani corrispondenti, in una polarità non uniforme della stella. che si appartengono; oppure come *proiezione di una conica* (da un centro « *vertice* » fuori del suo piano). Viceversa *la sezione di un cono quadrico con un piano non passante pel vertice è una conica.*

Le rette di un cono diconsi sue *generatrici;* i piani di esso diconsi « *piani tangenti* » secondo le generatrici polari.

Il cono concepito come luogo dei punti delle sue generatrici appare intuitivamente come una *superficie*; la figura ad esso correlativa è l'insieme dei piani passanti per le tangenti ad una conica (piani che diconsi tangenti di essa).

Un caso particolare * del cono quadrico è il *cono circolare retto* o *di rotazione*, che si ottiene proiettando un cerchio da un punto della perpendicolare al piano di esso nel suo centro.

Come estensione del cono circolare retto si può considerare il *cono circolare obliquo;* proiezione di un cerchio da un punto esterno al suo piano posto fuori della perpendicolare elevata al piano stesso, nel centro del cerchio. Più tardi si vedrà come ogni cono quadrico ammetta delle sezioni piane circolari e possa quindi considerarsi come un cono circolare, retto od obliquo. Qui ci limitiamo a notare che da un qualsiasi cono circolare si possono ottenere, come sezioni piane, le tre specie di

coniche: iperbole, parabola, ellisse, segandolo con un piano (non passante pel vertice) il quale sia parallelo a due generatrici del cono, o rispettivamente ad una, o a nessuna.

§ 57. **Proprietà dei poli e polari rispetto ad una conica.** — Come una polarità piana non uniforme determina una conica fondamentale, così a sua volta la conica determina la polarità.

Si prendano infatti sulla conica 4 punti (di cui certo 3 non sono mai in linea retta) e si facciano ad essi corrispondere le relative tangenti della conica (di cui 3 non passano per un punto); resta così determinata nel piano una polarità non uniforme che non può differire da quella che definisce la conica.

Potremo dunque considerare indifferentemente nel seguito, come relazioni rispetto alla conica, le relazioni di polo e polare, di elementi coniugati, ecc. definite rispetto alla polarità.

I poli e le polari rispetto ad una conica danno luogo ad importanti proprietà, ciascuna delle quali si può considerare come una nuova definizione della polarità e come un mezzo per risolvere facilmente i relativi problemi di costruzione.

Data una conica C,

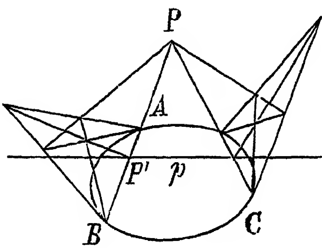
la polare p *di un punto* P *che non le appartenga:*

1) *Contiene tutti i coniugati armonici di* P *rispetto alle coppie di punti comuni alla conica* C *e ad una qualsiasi secante per* P;

il polo P *d' una retta* p *non tangente ad essa:*

1) *Appartiene a tutte le rette coniugate armoniche di* p *rispetto alle coppie di tangenti condotte a* C *per un qualsiasi punto, esterno ad essa, di* p;

Infatti, se si considera una secante per P, la quale incontri C nei punti A, B, su questa retta si ha una involuzione (iperbolica) costituita dalle coppie di punti

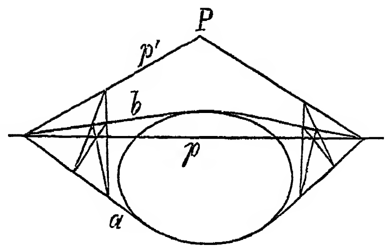


coniugati, avente A, B come punti doppi, quindi il coniugato di P su di essa (che è un punto di p) è il coniugato armonico P' di P rispetto ad A, B.

2) *Contiene i punti di contatto delle eventuali tangenti alla conica passanti per* P.

Infatti se per P passa una tangente a C, il suo punto di contatto A è coniu-

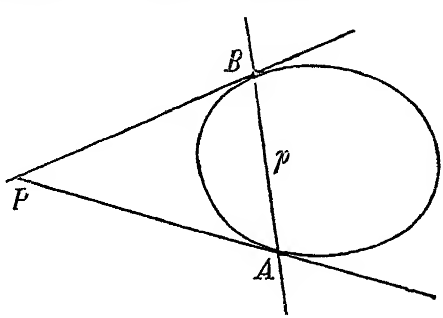
Infatti, basta stabilire il



ragionamento correlativo di quello a sinistra.

2) *Appartiene alle tangenti negli eventuali punti d'incontro della conica colla retta* p

Correlativamente (e inversamente) all'enunciato di sinistra.



gato di P giacchè la tangente in A (polare di A) passa per P.

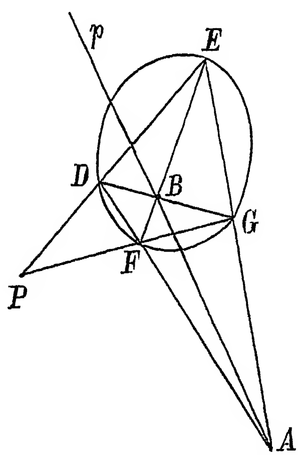
3) *È l' asse di una omologia armonica di centro* P, *che trasforma in sè stessa la conica.*

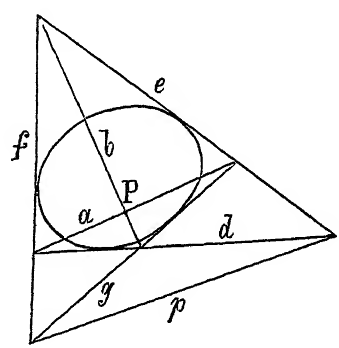
3) *È il centro di una omologia armonica di asse* p, *che trasforma in sè stessa la conica.*

Questa proprietà non è che una diversa espressione della prima.

4) *Contiene tutti gli ulteriori punti diagonali dei quadrangoli iscritti nella conica, aventi un punto diagonale in* P.

4) *Appartiene a tutte le ulteriori rette diagonali dei quadrilateri circoscritti alla conica, aventi* p *come retta diagonale*





Riferiamoci p. e. all' enunciato di sinistra.

Sia $DEGF$ un quadrangolo iscritto nella conica C, avente un punto diagonale in P, e sieno A, B gli altri due punti diagonali di esso; infine sieno GF, ED i lati del quadrangolo per P. Pel § 14 la retta AB sega le GF, ED in punti coniugati armonici di P rispetto alle coppie GF, ED; quindi (per la proprietà 1) la AB è la polare p di P; ciò dimostra il teorema.

Osservazione. — Queste varie definizioni della polare d'un punto e del polo d'una retta, rispetto ad una conica, danno luogo alle relative semplici costruzioni: è in generale da preferirsi quella data dalla proprietà 4). Se ne cavano anche notevoli proprietà. Per esempio:

Il triangolo diagonale di un quadrangolo iscritto nella conica, è coniugato rispetto alla conica

Il trilatero diagonale d'un quadrilatero circoscritto alla conica, è coniugato rispetto ad essa.

Giacchè, (riferendoci, per esempio, all'enunciato di sinistra) le coppie di vertici del triangolo sono coppie di punti coniugati (per la proprietà 1).

Una conseguenza immediata della proprietà 2) è la seguente:

La polare di un punto rispetto ad una conica è esterna o secante, secondochè il punto è, rispettivamente, interno od esterno alla conica.

Si ha ancora:

In un triangolo coniugato rispetto ad una conica due lati sono secanti ed uno esterno, due vertici esterni ed uno interno.

Infatti (§ 53), su due delle tre rette costituenti il triangolo coniugato, le involuzioni di punti coniugati sono iperboliche, mentre sulla terza si ha un'involuzione ellittica.

§ 58.* **Diametri delle coniche.** — Poniamo in relazione una data conica colla retta all'infinito del suo piano e consideriamo le relazioni metriche, che così scaturiscono dalla polarità. Ne ricaveremo ancora nuovi elementi per acquistare una più esatta nozione della forma delle coniche.

Abbiamo già detto che una conica dicesi ellisse, iperbole, o parabola, secondochè la retta all'infinito è ad essa esterna, secante o tangente. Lo studio di queste tre linee, sebbene dotate di proprietà metriche differenti, si

può condurre, considerandole tutte e tre insieme; le distinzioni, ove è il caso, si presentano da sè.

Rispetto ad una qualsiasi conica, le rette coniugate della retta all'infinito diconsi *diametri*, e, precisamente, *diametri coniugati alla direzione* delle rette passanti per il polo (all'infinito) di esse.

Per il polo d'un diametro, supposto non appartenente alla conica, passano infinite rette parallele seganti la conica ciascuna in due punti proprî; i segmenti finiti compresi fra tali punti costituiscono un sistema di *corde* parallele della conica.

Dal § 56 segue:

Un diametro di una conica, che non sia tangente alla conica (nel suo punto all'infinito), *è il luogo dei punti medi delle corde della conica, parallele alla direzione coniugata.*

Tutti i diametri d'una conica passano per un punto, detto *centro*, polo della retta all'infinito. Nell'iperbole e nell'ellisse questo punto è proprio, e però tali curve diconsi *coniche a centro*: l'opposto avviene *nella parabola*, cioè *tutti i diametri sono paralleli* (il centro è all'infinito).

Il centro è interno nell'ellisse ed esterno nell'iperbole, poichè la sua polare è esterna nel 1.° caso, secante nel 2.°. Le due tangenti all'iperbole, condotte pel centro, la toccano nei punti all'infinito; come già abbiamo avvertito, esse diconsi *asintoti*.

Si è visto in generale (§ 52), che le rette coniugate rispetto ad una conica, passanti per un punto che non le appartenga, si corrispondono in un'involuzione: così, data una conica a centro, le coppie di diametri coniugati di essa formeranno un'involuzione pel centro (*involuzione dei diametri coniugati*), la quale sarà ellittica o iperbolica secondo la natura della conica, e nel secondo caso avrà come raggi doppi gli asintoti.

I diametri della parabola, tutti paralleli tra loro, sono coniugati ciascuno ad una direzione del piano, essendo le polari dei punti all' infinito

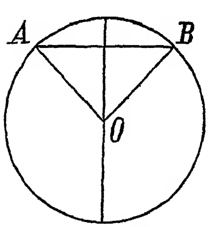
Osservazione. — Date due coppie di diametri coniugati di una conica a centro, si riconoscerà immediatamente la natura iperbolica o ellittica della conica, guardando se le nominate coppie si separano o no (§ 37).

Un punto non appartenente ad una conica e la sua polare sono centro ed asse di un' omologia involutoria che trasforma in sè stessa la conica (§ 57, 3): dunque.

Il centro (proprio) di una conica è centro di una simmetria che trasforma in sè la conica; ossia è il punto medio delle corde della conica che passano per esso

Se due corde della conica si bisecano, il comune punto medio di esse è il centro della conica.

§ 59.* **Assi delle coniche.** — Nel cerchio tutte le coppie di diametri coniugati sono ortogonali, ossia l' involuzione dei diametri coniugati e l' involuzione degli angoli retti. Infatti, dato un diametro del cerchio, il diametro ad esso perpendicolare e il suo coniugato. perchè biseca le corde ad esso parallele.



Viceversa: si abbia una conica C (a centro) in cui l' involuzione dei diametri coniugati sia quella degli angoli retti: dico che la C è un cerchio. Infatti, sieno A, B due punti arbitrari della conica. Il diametro (per il centro O) perpendicolare al segmento AB è coniugato alla direzione della corda AB e quindi la biseca; segue che i segmenti OA, OB sono uguali fra loro. Dunque la conica è il luogo dei punti distanti da O del segmento OA, ossia è il cerchio di centro O e raggio OA. *c. d. d.*

Le proprietà stabilite si possono riassumere nel

Teorema. — *La condizione necessaria e sufficiente perchè una conica sia un cerchio, è che l'involuzione di punti coniugati subordinata da essa, sulla retta all'infinito, sia l'involuzione assoluta.*

Eccepito il caso del cerchio, l'involuzione dei diametri coniugati di una conica a centro, non è quella degli angoli retti; perciò in essa esiste *una* coppia di diametri coniugati ortogonali, coppia comune alla detta involuzione dei diametri coniugati e a quella (ellittica) degli angoli retti (§ 41).

In una conica, i diametri ortogonali alla direzione coniugata diconsi *assi*.

In una conica a centro esistono due assi, ortogonali fra loro, oppure la conica è un cerchio e tutti i suoi diametri sono assi.

Nell' iperbole gli assi sono le bisettrici degli angoli degli asintoti.

La direzione ortogonale ai diametri di una parabola sarà coniugata ad un diametro ben determinato, *asse* della parabola. Perciò *la parabola ha* **un** *asse.*

L' omologia armonica, avente per asse un asse della conica e per centro il polo di essa, cioè il punto all' infinito nella direzione ortogonale, trasforma la conica in sè stessa; dunque:

Un asse di una conica è asse di una simmetria ortogonale che trasforma in sè stessa la conica.

§ 60. **Teorema di Staudt.** — Se nel piano di una conica si considerano,

due rette qualunque a, b, non coniugate, e a ciascun punto dell'una si fa corrispondere quel punto dell' altra che è coniugato al primo, le due

due punti qualunque A, B, non coniugati, centri di due fasci, e a ciascuna retta dell' uno si fa corrispondere quella retta dell' altro fascio

rette risultano proiettive tra loro.

Infatti ciascuna retta è prospettiva (sezione) al fascio delle polari dei punti dell'altra

che è coniugata alla prima, i due fasci risultano proiettivi fra loro.

Infatti ciascun fascio è prospettivo (proiezione) alla punteggiata dei poli delle rette dell'altro.

In particolare:

Se il punto comune alle nominate rette a, b, è coniugato di sè stesso (cioè appartiene alla conica), le rette a, b risultano prospettive, ossia le congiungenti i punti coniugati rispettivamente su a, b, passano per un punto.

Se la retta AB congiungente i due punti è coniugata di se stessa (ossia è una tangente alla conica), i fasci A, B, risultano prospettivi, cioe i punti d'intersezione di due rette coniugate rispettivamente per A, B stanno sopra una retta.

Di qui si deducono i teoremi (di STAUDT):

Data una conica ed un triangolo ABC *iscritto in essa* (cioè tale che i suoi vertici sieno sulla conica), *ogni retta coniugata ad un lato* BC *del triangolo, sega gli altri due lati in punti coniugati.*

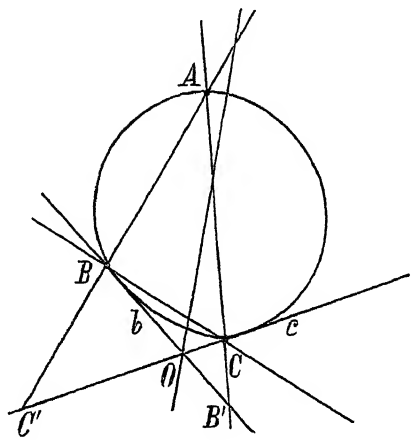
Viceversa, se una retta sega due lati AB, AC *del triangolo in due punti coniugati, essa è coniugata al terzo lato, cioè passa per il polo di esso.*

Data una conica ed un trilatero abc *circoscritto*, (cioè tale che i suoi lati sieno tangenti ad essa), *ogni punto coniugato ad un vertice* bc *del trilatero, proietta gli altri due vertici secondo due rette coniugate.*

Viceversa, se un punto proietta due vertici ab, ac *del trilatero secondo due raggi coniugati, esso è coniugato al terzo vertice, ossia appartiene alla sua polare.*

Delle due proposizioni correlative, dimostriamo quella a sinistra.

Le punteggiate AB, AC, il cui punto comune A è coniugato di sè stesso, ove si considerino come corrispondenti i punti dell'una ai punti coniugati dell'altra, risultano prospettive; per trovare il centro O di prospettività basta congiungere due coppie di punti omologhi (coniugati). A tale scopo si considerino le polari b, c di B, C, (tangenti alla conica rispettivamente in B, C) seganti rispettivamente in B', C' le rette AC, AB; i punti B, B' ed i punti C, C' sono coniugati, onde il centro di prospettività O cercato, è il punto bc.



Questo punto O, così costruito. è il polo della retta BC. Ciò significa che la congiungente due punti coniugati, posti rispettivamente su AC. BC (passa per O, ossia) è coniugata di BC Viceversa ogni retta per O, cioè ogni retta coniugata di BC, sega AC, BC in due punti omologhi, ossia coniugati, *c.d.d.*

Le proposizioni precedenti s'invertono anche, evidentemente, nel seguente modo:

Se un triangolo ABC ha due vertici A, B sopra una conica e i due lati AC, BC di esso segano una retta coniugata al lato AB in punti coniugati, anche il terzo vertice C del triangolo appartiene alla conica

Se un trilatero abc ha due lati a, b, tangenti ad una conica e i due punti ac, bc di esso sono proiettati da un punto coniugato al punto ab, secondo due rette coniugate, anche la terza retta è tangente alla conica.

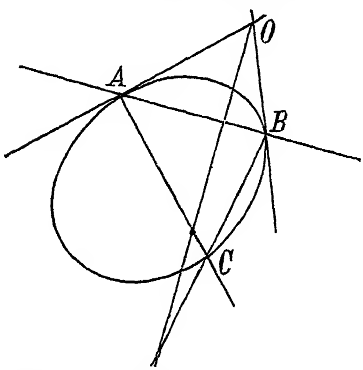
§ 61. Teorema di Steiner: generazione proiettiva delle coniche.

Stabiliamo ora i teoremi·

Proiettando i punti di una conica da due punti A, B *di essa, si ottengono due fasci di raggi proiettivi.*

Segando le tangenti di una conica con due tangenti a, b *di essa, si ottengono due punteggiate proiettive.*

Riferendoci p. e. all'enunciato di sinistra, vediamo che esso risulta subito dall'osservazione seguente Se i due fasci A, B sono riferiti fra loro in modo che si corrispondano due raggi come AC, BC proiettanti uno stesso punto C della conica, le sezioni dei due fasci con una retta coniugata ad AB (non passante per A, B) sono due punteggiate sovrapposte proiettive (in involuzione): infatti due raggi come AC, BC segano la retta in due punti coniugati (§ 60), e le coppie di punti coniugati sopra una retta non tangente alla conica formano una involuzione.



Si noti che nella proiettività intercedente fra i due fasci proiettivi di centri A, B, al raggio comune AB corrispondono le tangenti alla conica, rispettivamente in A ed in B.

Reciprocamente si ha:

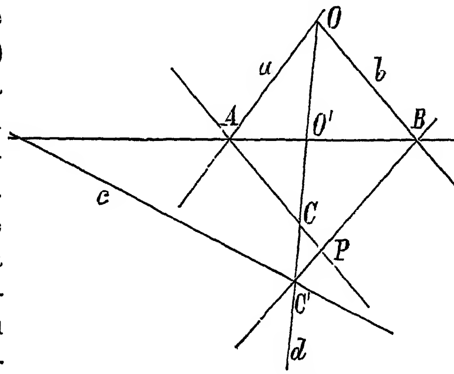
Nel piano

Il luogo delle intersezioni dei raggi omologhi di due fasci proiettivi, non prospettivi nè concentrici, è una conica.

L'inviluppo delle rette congiungenti i punti omologhi di due punteggiate proiettive, non prospettive nè concentriche, è una conica.

Riferiamoci p. e. all'enunciato di sinistra.

Sieno A, B i due fasci, a, b i raggi (diversi da A, B) che corrispondono al raggio comune AB rispettivamente per A, B, ed O il loro punto d'incontro. Consideriamo una retta d per O (diversa da a, b) la quale seghi AB in un dato punto O'. I raggi omologhi dei fasci proiettivi A, B, segati colla d, danno luogo a due punteggiate proiettive sovrapposte dove O, O' si corrispondono in doppio modo: essi segano dunque sulla d tante coppie di un'involuzione. Sieno C, C' due punti (diversi da O, O') coniugati in questa involuzione, ottenuti segando i raggi (corrispondenti) AP, BP.



Possiamo porre nel piano una polarità ben determinata prendendo come polari dei punti O, A, B rispettivamente le rette AB, a, b, ed esigendo inoltre che C, C' sieno punti coniugati. Infatti, stante le prime condizioni, resta fissato che ai punti della retta AB corrispondano nella polarità le rette per O che sono coniugate a quei punti nella involuzione definita dalle coppie Aa e Bb; mentre la condizione che C, C' sieno coniugati nella polarità, porta ad assegnare come polare del punto C la retta c che unisce C' al coniugato armonico di O' rispetto ad A, B. La polarità resta così ben determinata secondo il § 51. Essa ammette una conica fondamentale, che passa per A, B, toccando a, b.

Ora due rette per A, B, corrispondenti nella proiettività data fra i due fasci, segano d in due punti che sono coniugati rispetto alla involuzione definita dalle coppie OO', CC', ossia in due punti coniugati rispetto alla conica

Si deduce che tali rette s' incontrano in un punto della conica (§ 60): ciò dimostra il teorema

Osservazione 1.ª — Se nel piano si considerano due fasci di raggi prospettivi (non concentrici), il luogo delle intersezioni dei raggi omologhi è una coppia di rette (*conica luogo degenere*) costituita dall' asse di prospettività e dal raggio comune (unito) dei due fasci. Correlativamente due punteggiate prospettive (non sovrapposte) generano una coppia di punti (*conica inviluppo degenere*), costituita dal centro di prospettività e dal punto comune (unito) di esse.

Osservazione 2.ª — La generazione proiettiva delle coniche (con fasci o punteggiate) data innanzi, permette di riportare alle coniche (concepite sia come luogo, sia come inviluppo) le nozioni di ordini naturali. elementi susseguentisi, coppie che si separano, ecc. stabilite per le forme di 1.ª specie.

Invero se più punti di una conica vengono proiettati da un punto di essa conica secondo raggi (d' un fascio) susseguentisi, lo stesso avverrà quando i nominati punti vengono proiettati da un altro punto, comunque scelto sulla conica stessa; si dirà allora che quei *punti si susseguono sulla conica* Così pure si dirà che *si susseguono più tangenti di una conica*, le quali vengano segate (da una e quindi) da ogni altra tangente secondo punti susseguentisi Potremo quindi parlare di due segmenti o *archi* complementari determinati da due punti di una conica ecc., ed applicare alle coniche le considerazioni ed i teoremi relativi alle corrispondenze ordinate.

Se più punti di una conica si susseguono. si susseguono anche le tangenti in essi alla conica.

Ciò si desume dal fatto che la polarità rispetto alla conica fa corrispondere ad un fascio di raggi proiettanti i punti $B, C....$ della conica da un punto A di essa, la punteggiata luogo dei punti intersezioni della tangente a

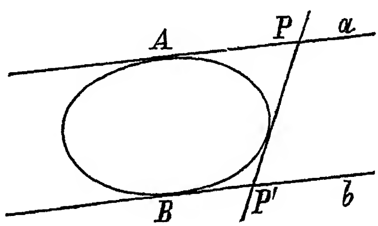
in A colle tangenti $b, c.....$ rispettivamente in $B, C....$: basta osservare che, per effetto della polarità, il fascio A e la punteggiata a risultano proiettivi, e quindi in corrispondenza ordinata.

Allorchè abbiamo parlato in principio della forma delle coniche, guardate sotto l'aspetto grafico, abbiamo detto che esse appaiono come linee chiuse generate dal moto di un punto (o di una tangente) che ritorna alla posizione iniziale. Non altrimenti appare, rispetto all'intuizione grafica, la retta, dopo l'introduzione del punto improprio; ed analoga è pure la generazione col movimento di un fascio di raggi o di piani.

Questa generazione col movimento di un elemento che ritorna alla posizione iniziale, è il fondamento intuitivo comune delle nozioni di ordini naturali, così per le forme di 1.ª specie, come per le coniche. Dimodochè le relazioni inerenti al susseguirsi, ecc. di punti (o tangenti) di una conica, appariscono immediatamente alla vista, quando ci si riporti alla rappresentazione di una conica col disegno.

§ 62.* **Casi particolari metrici della generazione proiettiva di una conica. — Cerchio e iperbole equilatera.** — I teoremi di generazione del precedente § ci conducono ad alcuni casi particolari sotto l'aspetto metrico. Fermiamoci dapprima sulle coniche concepite come inviluppo.

Consideriamo due tangenti proprie parallele a, b, di una conica a centro. Segandole con le altre tangenti, si ottiene tra le a, b una proiettività, nella quale i punti di contatto A, B di esse corrispondono al punto improprio

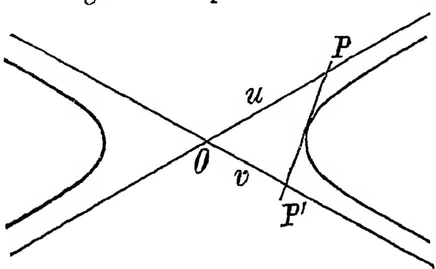


comune, considerato rispettivamente su b o su a. I punti A, B sono dunque i punti limiti della proiettività nominata.

Di qui si ricava la conclusione (§ 34):

Si considerino due tangenti proprie parallele a, b *di una conica a centro, ed i loro punti di contatto* A, B: *una tangente variabile della conica sega le* a, b, *in due punti, tali che il prodotto delle distanze di essi da* A, B *è costante.*

Si abbia ora un'iperbole, e sieno u, v i suoi asintoti. Le tangenti all'iperbole determinano su u, v, due punteggiate proiettive, aventi ambedue come punto limite il centro $O \equiv uv$.



Se si indicano con P, P' le intersezioni di una tangente variabile della iperbole rispettivamente con u, v, si ha dunque che il prodotto $OP \cdot OP'$ è costante. (§ 34). Si deduce che:

Data un'iperbole, il triangolo determinato dagli asintoti e da una tangente variabile ha area costante. Questa proprietà è caratteristica per l'iperbole-inviluppo.

Consideriamo infine una parabola e due tangenti qualsiansi proprie di essa Queste vengono segate dalle altre tangenti secondo due punteggiate proiettive, dove i punti all'infinito si corrispondono. Si deduce (§ 29) che.

Segando con una tangente variabile due tangenti proprie fisse di una parabola, si ottengono punteggiate simili.

Viceversa *Congiungendo i punti omologhi di due punteggiate simili (non prospettive) di un piano, si ottiene come inviluppo una parabola.*

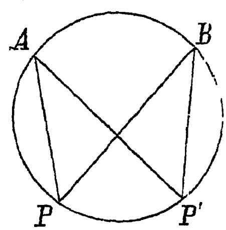
Riferiamoci invece alle coniche concepite come luogo.

Si presentano allora due casi particolari notevoli, rispettivamente della ellisse e della iperbole, casi in cui si ha una generazione mediante fasci di raggi congruenti.

Due fasci di raggi direttamente congruenti, in un piano (supposto che non sieno riferiti per parallelismo di elementi) generano un cerchio, come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi.

Viceversa: *Proiettando i punti di un cerchio da due punti fissi di esso, si ottengono due fasci direttamente congruenti.*

Per dimostrare il teorema, si considerino due fasci direttamente congruenti, A, B, di un piano, (non prospettivi), e si avverta anzitutto che la conica da essi generata è certo un'ellisse, perchè i nominati fasci determinano (per sezione) sulla retta all'infinito una proiettività (congruenza) priva di punti uniti. Si scelga ancora sulla detta ellisse un altro punto fisso P, e si consideri infine su di essa un qualsiasi punto variabile P'; basterà mostrare che questo appartiene al cerchio determinato dai tre punti A, B, P, poichè risulterà allora che il luogo del punto variabile P' è il cerchio nominato.



Ora, per ipotesi, gli angoli PAP', PBP', sono uguali o supplementari: ma, poichè la congruenza tra i due fasci è diretta, si riconosce subito che tra gli angoli nominati che comprendono il segmento finito PP', sussiste uguaglianza o relazione supplementare, secondochè i punti A, B, giacciono nella stessa banda o in banda opposta del piano rispetto alla retta PP' (considerate le cose nel senso della geometria elementare). Di qui si trae che i punti P, P' appartengono sempre ad un cerchio, *c. d d.*

Il ragionamento è perfettamente invertibile.

Dicesi *iperbole equilatera* l'iperbole dotata di asintoti ortogonali.

Sussiste allora il teorema:

In un piano, due fasci di raggi inversamente congruenti, non prospettivi, generano, come luogo delle intersezioni dei raggi omologhi, un' iperbole equilatera.

Infatti, si consideri la proiettività ottenuta, segando i due fasci, sulla retta impropria. Questa proiettività è una congruenza inversa, di cui i punti doppi sono i punti all'infinito della conica (iperbole) generata dai due fasci. ma questi punti corrispondono a direzioni ortogonali (§ 32) dunque gli asintoti dell'iperbole generata dai due fasci sono ortogonali, *c. d d.*

Si può dire di più che *i centri dei fasci generatori saranno simmetrici rispetto al centro dell'iperbole.* Invero la retta AB deve essere ugualmente inclinata sulle tangenti in A. B all'iperbole, sicche (tenuto conto del senso della congruenza fra A, B) si vede che le nominate tangenti riescono parallele; ma poichè esse s'incontrano nel polo della retta AB, la AB è un diametro, ossia A, B sono simmetrici rispetto al centro, *c. d. d.*

Viceversa, si può dimostrare per esercizio che: *Se si proiettano i punti di un' iperbole equilatera da due punti di essa, simmetrici rispetto al centro, si ottengono due fasci di raggi inversamente congruenti.*

§ 63. Condizioni che determinano una conica.

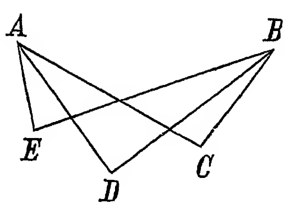
Nel piano

5 punti, di cui 3 non in linea retta, determinano una conica che passa per essi.

5 rette, di cui 3 non passanti per un punto, determinano una conica a cui sono tangenti.

Dimostriamo il teorema a sinistra:

Sieno A, B, C, D, E i cinque punti. I due fasci A, B possono essere riferiti proiettivamente facendo corrispondere i raggi AC, BC; AD, BD; AE, BE. Allora essi generano una conica o una coppia di rette passante per i 5 punti A, B, C, D, E; ma il secondo caso è da escludersi.



perchè tre dei punti A, B, C, D, E non sono mai in linea retta; dunque per A, B, C, D, E passa una conica Questa conica è unica, perchè data una conica pei 5 punti, i punti di essa debbono venir proiettati da A, B secondo due fasci di raggi proiettivi, e la proiettività tra i due fasci riesce determinata dalla corrispondenza delle coppie AC, BC; AD, BD; AB, BE.

Il ragionamento precedente non cessa di valere se, (ad uno dei 5 punti, p. e.) al punto C si sostituisce una retta b per B non passante per alcuno degli altri punti, la quale debba essere tangente alla conica da determinarsi. Invero la b deve corrispondere al raggio AB, nella proiettività tra i due fasci generatori della conica. Ulteriormente si può anche sostituire ad un altro punto D la tangente a in A (non passante per B, E).

Così siamo condotti ad enunciare i seguenti corollari:

Nel piano

4 punti, di cui 3 non in linea retta, e la tangente in uno di essi, non passante per alcun altro, determinano una conica.

4 rette, di cui 3 non passanti per un punto, ed il punto di contatto di una di esse, non appartenente ad alcuna delle altre rette, determinano una conica.

Similmente tre punti non in linea retta e le tangenti in due di essi, non passanti per alcuno dei rimanenti punti, determinano una conica.

Tre rette non passanti per un punto, ed i punti di contatto di due di esse, non appartenenti ad alcuna delle rimanenti rette, determinano una conica.

Osservazione. — Si può dire che gli enunciati corollari derivano dai teoremi posti innanzi, secondo il *principio di continuità*, facendo avvicinare indefinitamente, in una data direzione, due dei 5 punti dati, ecc.

Ma questa non sarebbe una giustificazione rigorosa di quei risultati, finchè almeno il principio di continuità non venisse stabilito con precisione, ciò che può esser fatto (con limitazioni che vengono qui soddisfatte) partendo da un ordine di idee più elevato.

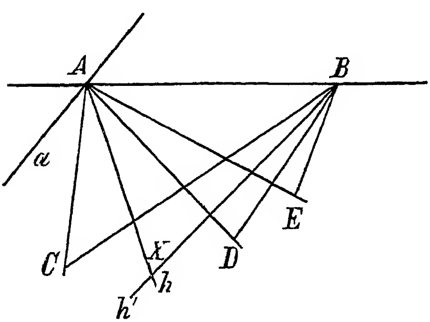
COSTRUZIONI. — *Data una conica mediante 5 dei suoi punti, o 4 punti e la tangente in uno di essi, o 3 punti e le tangenti in due di essi (sotto le restrizioni enunciate) si vuole:*

1.° Costruire l'intersezione ulteriore della conica con una retta (non tangente) passante per uno dei punti.

2.° Costruire la tangente in uno dei punti dati (ove non sia nota).

Riferiamoci al caso generale in cui la conica è data da 5 punti A, B, C, D, E (di cui tre non in linea retta). Si osserverà che le stesse costruzioni valgono in particolare per gli altri casi.

Allora le costruzioni domandate si riducono a quelle della proiettività individuata, tra i fasci A, B, dalle due terne di raggi $A(CDE)$, $B(CDE)$ (§§ 61, 28). Data una retta h per A, l'ulteriore punto X in cui essa sega la conica è il punto d'incontro di h col raggio omologo h' per B; la tangente a in A è il raggio corrispondente ad AB nel fascio A.



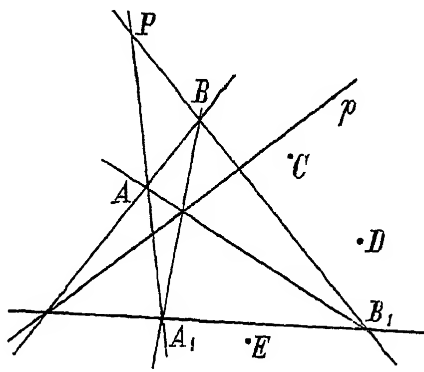
Considerando per A varie rette h assai vicine, e costruendo dei punti X abbastanza vicini, che potranno essere congiunti graficamente con un tratto continuo, si avrà la *costruzione per punti* della conica e si acquisterà così un'idea della sua forma.

Si eseguiranno per esercizio queste costruzioni insieme ai loro casi particolari notati e alle costruzioni correlative.

Data una conica mediante 5 elementi, nel modo detto innanzi si vuole ancora:

3.° Costruire la polare di un punto.

Supponiamo per esempio che la conica venga definita da 5 punti A,B,C,D,E (di cui 3 non in linea retta). Si unisca il punto in questione P con 2 dei 5 punti, per esempio con A, B, e si determinino le ulteriori intersezioni A_1, B_1 delle rette PA, PB colla conica: la polare p di P è la congiungente i punti d'intersezione delle coppie di rette AB, A_1B_1 e AB_1, A_1B.



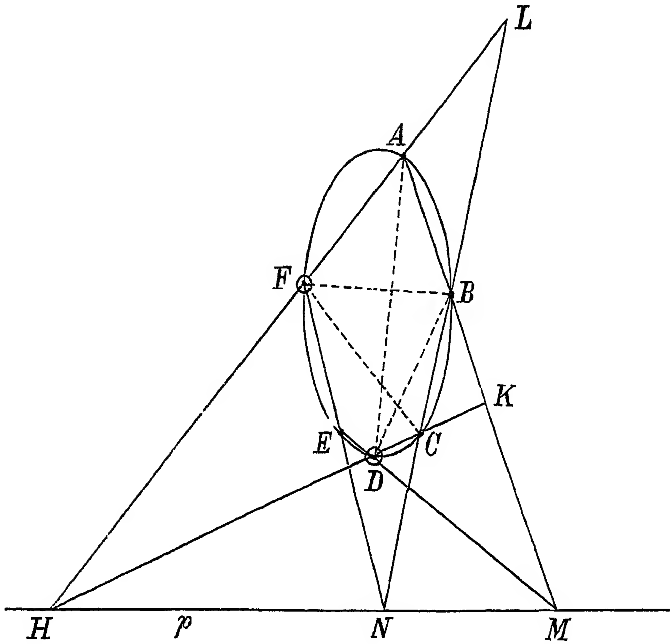
Correlativamente si costruisca il polo di una retta rispetto ad una conica definita per 5 tangenti.

Si risolvano pure, per esercizio, i problemi precedenti, allorchè la conica è definita da 5 elementi (colle solite condizioni) in un altro modo qualunque.

* In particolare, rispetto ad una conica così definita, si costruiscano le polari di due punti impropri, determinando così il centro (supposto proprio) e l'involuzione dei diametri coniugati.

Si trattino ancora dei casi particolari metrici delle costruzioni precedenti, assumendo un punto improprio fra quelli che definiscono la conica; ed in tale ipotesi (quando la retta all'infinito non sia tangente) si costruisca (per l'iperbole definita) l'asintoto di cui è data la direzione, e l'altro asintoto.

§ 64. **Teoremi di Pascal e di Brianchon.** — Si abbiano sopra una conica sei punti A, B, C, D, E, F formanti un *esagono semplice iscritto in essa.*



Dai punti D, F si proiettino i rimanenti punti A, B, C, E. Si otterranno così due fasci proiettivi $D(ABCE)$, $F(ABCE)$, i quali segheranno rispettivamente sulle rette AB e BC due punteggiate proiettive. Se dunque indichiamo con K ed M le rispettive intersezioni dei raggi DC e DE con AB, e con L, N le intersezioni dei raggi FA ed FE con BC, avremo:

$$BKMA \;\Pi\; BCNL.$$

Ma le due punteggiate proiettive $BKMA$...., $BCLN$.... hanno il punto comune B unito; quindi esse risultano prospettive, cioè le congiungenti le tre coppie di punti omologhi KC, MN, AL passano per un punto.

Ciò significa che i punti M, N, intersezioni delle coppie di lati opposti AB, ED e BC, EF dell'esagono, sono in linea retta con H, intersezione dell'altra coppia di lati opposti CD, AF.

Accanto a questo risultato enunciamo il correlativo, che si riferisce ad ogni *esalatero semplice circoscritto ad una conica*, cioè ad ogni esalatero costituito da sei tangenti della conica.

Si hanno così i celebri teoremi:

Teorema di Pascal:

Se un esagono semplice è iscritto in una conica, le tre coppie di lati opposti s'incontrano in tre punti su una retta (retta Pascal); un tale *esagono* dicesi *di Pascal*.

Teorema di Brianchon:

Se un esalatero semplice è circoscritto ad una conica, le congiungenti le tre coppie di vertici opposti passano per un punto (punto di Brianchon), un tale *esalatero* dicesi *di Brianchon*.

Invertiamo il ragionamento precedente. Se le tre coppie di lati opposti AB, ED; BC, FE; CD, AF di un esagono $ABCDEF$ sono in linea retta, i fasci di raggi che da D, E proiettano i rimanenti punti, sono proiettivi, quindi i sei vertici dell'esagono stanno sulla conica (eventualmente degenere) generata dai due fasci.

Enunciando anche il risultato correlativo, si ha:

Ogni esagono di Pascal, di cui tre vertici non sieno in linea retta, è iscritto in una conica. Se tre dei suoi vertici sono in linea retta, l'esagono risulta iscritto in una coppia di rette (conica degenere).

Ogni esalatero di Brianchon, di cui tre rette non passino per un punto, è circoscritto ad una conica. Se tre dei suoi lati passano per un punto, l'esalatero è circoscritto ad una coppia di punti (conica degenere).

Come casi particolari dei teoremi di Pascal (e di Brianchon) possiamo considerare quegli enunciati che si deriverebbero da essi, secondo il principio di continuità

(§ 63), facendo avvicinare indefinitamente due vertici di un esagono iscritto in una conica, ecc. Ma si deve notare che questi casi vengono dimostrati in modo rigoroso e diretto dalla stessa dimostrazione che serve a stabilire il teorema di Pascal; giacchè (riferendoci a quel ragionamento) se in luogo di considerare l' esagono $ABCDEF$ si considera il pentagono $ABCDE$ e si sostituisce alla considerazione del lato AF la tangente in A alla conica, il ragionamento procede egualmente.

Così similmente, se si sovrappone ancora il punto C al punto D; e lo stesso dicasi nel caso duale. Potremo dunque enunciare, come casi particolari dei teoremi di Pascal e Brianchon, le seguenti proposizioni:

Se un pentagono semplice è iscritto in una conica, il punto d' incontro della tangente in un vertice col lato opposto è in linea retta coi punti d' intersezione delle due rimanenti coppie di lati non consecutivi.

Se un pentalatero semplice è circoscritto ad una conica, la congiungente il punto di contatto di un lato col vertice opposto passa per il punto comune alle rette congiungenti le due rimanenti coppie di vertici non consecutivi.

Se un quadrangolo semplice è iscritto in una conica, il punto comune alle tangenti in due vertici opposti di esso è in linea retta coi punti (diagonali) comuni alle coppie di lati opposti.

Se un quadrilatero semplice è circoscritto ad una conica, la congiungente i punti di contatto di due lati opposti di esso passa per il punto comune alle (diagonali) congiungenti i due vertici opposti.

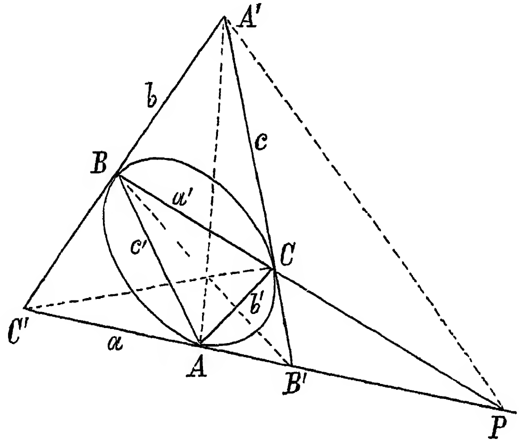
I precedenti teoremi sono anche invertibili, come l' enunciato generale, coll' avvertenza che la conica in cui è iscritto il pentagono o il quadrilatero (o correlativamente) potrà risultare degenere. Così, per esempio, essa degenera in due rette, se il pentagono è tale che tre dei

suoi punti sieno in linea retta, oppure la tangente assegnata passi per uno degli altri vertici.

Applicando ancora lo stesso principio di continuità che ci ha condotti ai teoremi precedenti, potremmo fare avvicinare altri due punti, B ed E, ottenendo così il teorema (correlativo di sè stesso):

Un triangolo iscritto in una conica ed il trilatero, circoscritto, delle tangenti nei vertici sono omologici.

La dimostrazione di esso non viene però data direttamente dal ragionamento, che ha servito a stabilire il teorema di Pascal. Tuttavia il risultato può ancora stabilirsi in modo rigoroso per mezzo delle seguenti osservazioni:



Sieno $A. B, C$ tre punti sulla conica, vertici del triangolo iscritto; e sieno a, b, c le rispettive tangenti; A', B', C', i vertici del triangolo circoscritto, rispettivamente opposti ai lati a, b, c. Consideriamo il punto $P \equiv a \,.\, BC$. La sua polare è la retta AA', poichè i punti A ed A' sono i poli delle due rette a, BC. Di qui si trae che le rette $A'P$, $A'A$ sono coniugate rispetto alla conica, quindi separano armonicamente le tangenti b, c, raggi doppi della involuzione di rette coniugate avente come centro A'.

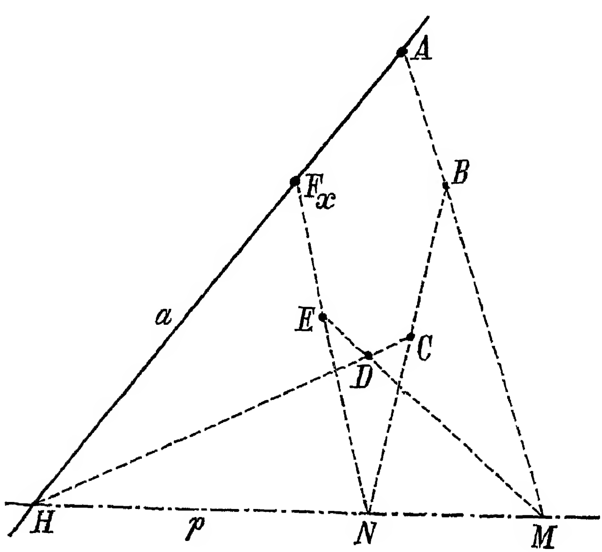
Ora, se si congiunge A' col punto $BB' . CC'$ si ottiene una retta che insieme alla $A' P$ separa armonicamente le rette b, c (§ 14). Questa retta non può dunque differire dalla $A' A$, e perciò le tre rette AA', BB', CC' passano per un punto.

Correlativamente i punti aa', bb', cc' sono in linea retta. Questa è d'altronde una immediata conseguenza dell'omologia dei due triangoli.

COSTRUZIONI. — I teoremi di Pascal e di Brianchon ed i loro casi particolari ci permettono facilmente la risoluzione dei problemi seguenti già trattati nel § 63:

1.° Data una conica mediante cinque punti A, B, C, D, E, *di cui tre non in linea retta, costruire l' ulteriore intersezione* F_x *della conica con una retta* a *per il punto* A.

1.° Individuata una conica mediante cinque tangenti a, b, c, d, e, *delle quali tre non passanti per un punto, costruire l' ulteriore tangente* f_x *alla conica passante per un punto* A *di* a.



Si consideri perciò (a sinistra) l'esagono $ABCDEF_x$ iscritto nella conica (di cui il vertice F_x è ignoto), e se ne determini la retta di Pascal p, congiungendo i punti $H \equiv AF_x \, . \, DC$ ed $M \equiv ED \, . \, AB$. Detta N l'intersezione del lato CB con p, la retta $F_x E$ deve passare per N, sicchè il punto F_x sarà determinato dall' incontro delle due rette NE ed $AF_x \equiv a$.

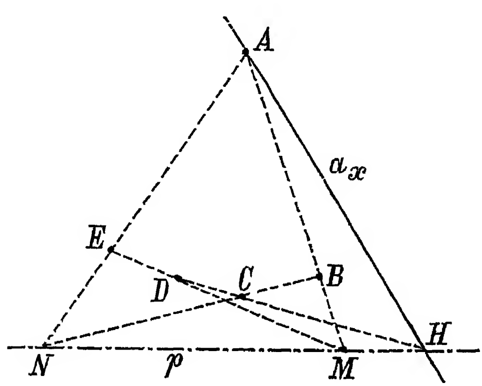
2.° *Data una conica mediante cinque punti* A,B,C, D,E (di cui tre non in linea retta). *costruire la tangente* a_x *nel punto* A.

2.° *Data una conica mediante cinque tangenti* a, b, c,d,e, (delle quali tre non passanti per un punto) *costruire il punto di contatto* A_x *della tangente* a.

Si consideri (a sinistra) il pentagono $ABCDE$.

Costruita la retta p di Pascal, congiungendo i punti $N \equiv AE \, . \, CB$ ed $M \equiv ED \, . \, AB$, si dica H il punto d'incontro della p con CD, lato opposto al vertice A del pentagono.

La tangente a_x richiesta sarà la retta HA.



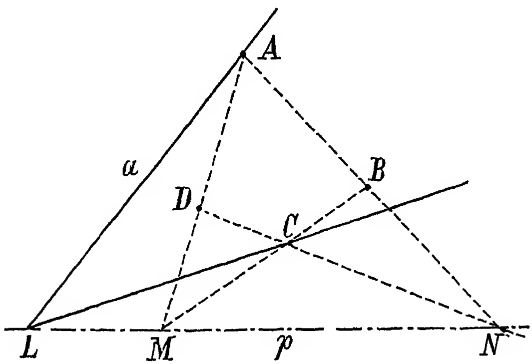
3.° *Data una conica mediante quattro punti* A, B, C, D, (dei quali tre non in linea retta) *e la tangente* a *in* A (non passante per al-

3.° *Data una conica mediante quattro tangenti* a, b, c, d (tre delle quali non passanti per un punto) *ed il punto di contatto* A *di* a,

cuno degli altri punti), *costruire la tangente* c_x *in uno di essi, p. e in* C.

(non appartenente ad alcun' altra tangente) *costruire il punto di contatto* C_x *di una di esse, p. e. di* c.

Si consideri (a sinistra) il quadrilatero $ABCD$.



Detti M ed N i punti d' incontro dei lati opposti, la loro congiungente p è la retta Pascal, quindi se L è il punto d' intersezione di p con la tangente in A alla conica, la retta LC è la tangente in C richiesta.

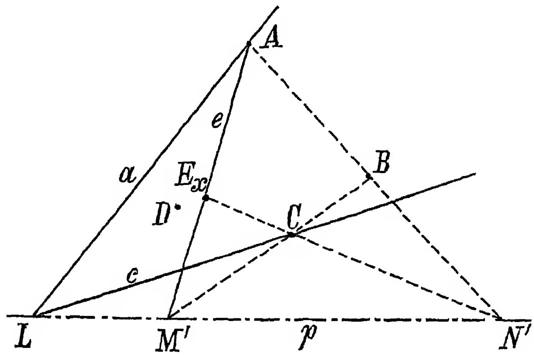
4.° Data una conica mediante 4 punti A, B, C, D (di cui 3 non in linea retta) *e la tangente* a *in uno di essi* A (non passante per alcuno dei rimanenti), *costruire l' ulteriore intersezione* E_x *della conica con una retta* e. *condotta per* A.

4.° Data una conica mediante 4 tangenti a, b, c, d (delle quali 3 non passanti per un punto) *e il punto di contatto* A *di una di esse* a (non appartenente ad alcuna delle rimanenti), *costruire l' ulteriore tangente* e_x *condotta alla conica per un punto* E *di* a.

Si costruisca (a sinistra) la tangente nel vertice C del quadrilatero $ABCD$.

Detto E_x il punto richiesto, si determini la retta Pascal relativa al quadrilatero $ABCE_x$, individuata dal punto L

comune alle due tangenti a, c, e dal punto M' comune alle due rette $e \equiv AE_x$, CB. Detto N' il punto $LM \,.\, AB$, la retta $N'C$ sega la e nel punto E_x richiesto.



Analogamente si risolveranno per esercizio i seguenti problemi:

Data una conica mediante tre punti A,B,C (non in linea retta) *e le tangenti* a, b *in due di essi* (non passanti per alcuno dei punti rimanenti), *costruire la tangente* c *in* C.

Data una conica mediante tre tangenti a, b, c (non passanti per un punto) *ed i punti di contatto* A,B *di due di esse* (non appartenenti ad alcuna delle rimanenti), *costruire il punto di contatto* C *della* c.

§ 65. **Teorema di Desargues.** — *Data una conica ed un quadrangolo iscritto in essa; una retta secante la conica, che non passi per un vertice del quadrangolo, la incontra in due punti, i quali sono coniugati nell' involuzione a cui appartengono le intersezioni*

Data una conica ed un quadrilatero circoscritto ad essa; due tangenti alla conica passanti per un punto, non giacente sopra un lato del quadrilatero, sono coniugate nell' involuzione a cui appartengono le tre coppie di

delle tre coppie di lati opposti del quadrangolo (§ 39). *raggi proiettanti dal punto i vertici opposti del quadrilatero* (§ 39).

Basta dimostrare l'enunciato a sinistra (che sotto forma metrica è stato dato da Desargues).

Sia $QRST$ un quadrangolo iscritto in una conica; u una retta secante la conica nei punti P, P', ed intersecante le coppie di lati opposti del quadrangolo rispettivamente nei punti A, A'; B, B'; C, C'.

Proiettando da Q, S i quattro punti $P, P', R, T,$ della conica, si ottiene:

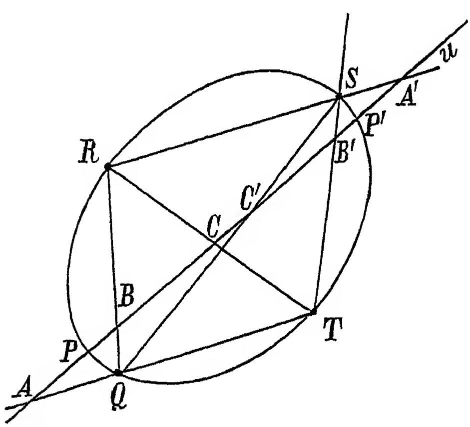
$$Q(PP'RT) \; \Pi \; S(PP'RT);$$

onde, segando con u, si ha:

$$PP'BA \; \Pi \; PP'A'B',$$

da cui

$$PP'BA \; \Pi \; P'PB'A'.$$



Questa relazione ci dice appunto che A, A' sono coniugati nell'involuzione $\begin{pmatrix} PP' & B \\ P'P & B' \end{pmatrix}$.

A questa stessa involuzione appartiene analogamente la coppia CC' (ciò che dimostra nuovamente che AA', BB', CC' sono tre coppie in involuzione, cfr. § 39).

Anche del teorema di Desargues si possono notare i casi particolari, in cui due vertici del quadrangolo, ad esempio S, R, vengono sostituiti da un punto S e dalla tangente in esso, ecc.; a questi casi si è ancora condotti dal ragionamento precedente.

Si ottengono allora i seguenti risultati:

Data una conica

ed un triangolo iscritto in essa; *una retta secante* (che non passi per un suo vertice) *incontra la conica in due punti coniugati nell' involuzione, a cui appartengono la coppia di punti segata da due lati del triangolo, e quella segata dal terzo lato e dalla tangente nel vertice opposto.*

ed un trilatero circoscritto ad essa; due tangenti alla conica passanti per un punto (non giacente sopra un suo lato) *sono coniugate nella involuzione, a cui appartengono la coppia di raggi proiettanti due vertici, e quella costituita dai raggi che proiettano il terzo vertice ed il punto di contatto del lato opposto.*

Data una conica

e due tangenti di essa; una retta secante (che non passi per uno dei punti di contatto di esse) *incontra la conica e le due tangenti in due coppie di punti determinanti una involuzione, che ha come punto doppio l' intersezione della congiungente i due punti di contatto.*

e due punti di essa; due tangenti della conica passanti per un punto (che non giaccia sulla congiungente i dati) *e i due raggi che proiettano da questo i due punti dati, determinano una involuzione che ha come raggio doppio quello che proietta il punto comune alle tangenti nei punti dati.*

Quest' ultimo teorema ci conduce al seguente

Corollario. * — *Data una iperbole, ed una retta secante, i due segmenti (minimi) intercetti tra l' iperbole e gli asintoti sono uguali;* ossia i segmenti AB, CD intercetti sulla retta dall' iperbole e dagli asintoti hanno lo stesso punto medio O. Infatti O è l' altro punto doppio della involuzione in cui sono coniugate le coppie AB, CD,

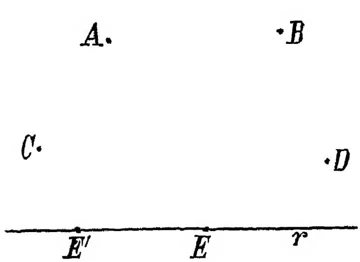
involuzione che ha pure come doppio il punto (improprio) sezione della retta data colla retta impropria.

Questo corollario permette una semplice costruzione per punti dell' iperbole definita mediante gli asintoti ed un suo punto proprio. Si svilupperà tale costruzione come esercizio.

Osservazione 1.ª — Il teorema di Desargues e i casi particolari enunciati danno ancora nuove costruzioni per risolvere i problemi fondamentali relativi alla determinazione di punti e tangenti delle coniche.

Così, per es., dati cinque punti A, B, C, D, E, di cui tre non in linea retta, si può determinare l' ulteriore intersezione della conica con una retta u per E, cercando su u il coniugato di E nell' involuzione determinata dalle sezioni dei lati opposti del quadrangolo completo $ABCD$, ecc.

Si considerino ora tutte le coniche (costituenti un *fascio*) che hanno comuni quattro punti $A, B. C, D$ (di cui tre non in linea retta) cioe le coniche che hanno uno stesso quadrangolo iscritto, e si fissi una retta r del piano non passante per A, B, C, D.



Per ogni punto E di r (che non sia sezione di un lato del quadrangolo $ABCD$) e per A, B, C, D passa una conica, che (ove non tocchi r) incontra r in un altro punto E'. *Le coppie di punti analoghe ad* EE′ *appartengono tutte all' involuzione determinata su* r *dalle tre coppie di lati opposti del quadrangolo* ABCD, le quali si possono considerare come *coniche degeneri* appartenenti al fascio. Viceversa, invertendo il ragionamento che ha servito alla dimostrazione del teorema di Desargues, si prova che ogni coppia di punti distinti dell' involuzione nominata (presa insieme ad A, B, C, D),

determina una conica del fascio, la quale può per altro essere degenere.

Si deduce che: se esistono, nel fascio, delle coniche tangenti ad r, il punto di contatto P di una di esse è doppio per la nominata involuzione; giacchè altrimenti la conica determinata dai 5 punti A, B, C, D, P segherebbe r in un punto coniugato di P e diverso da esso, ossia non sarebbe tangente ad r in P.

Poichè in una involuzione non vi sono punti doppi o ve ne sono due, deduciamo il seguente teorema a sinistra, cui poniamo a lato il correlativo:

Dati quattro punti, vertici di un quadrangolo, ed una retta del loro piano, che non ne contenga alcuno; o non vi è nessuna conica che passi per i quattro punti e sia tangente alla retta,

o vi sono due coniche siffatte, ed i punti di contatto di esse colla retta sono i punti doppi della involuzione, che su questa determinano le tre coppie di lati opposti del quadrangolo.

Date quattro rette, lati di un quadrilatero, ed un punto del loro piano, non giacente sopra uno di essi; o non vi è nessuna conica tangente alle quattro rette e passante per il punto,

o vi sono due coniche siffatte, e le tangenti ad esse per il punto sono i raggi doppi della involuzione determinata, nel fascio, dalle tre coppie di raggi proiettanti i vertici opposti del quadrangolo.

Osservazione 2.ª — Se, riferendoci per esempio al caso a sinistra, si suppone che la data retta passi per uno dei quattro punti (ma non per due), abbiamo visto che vi è *una* conica tangente alla retta per i quattro punti. Correlativamente si dica a destra.

Dati i quattro punti A, B, C, D vertici d'un quadrangolo, ed una retta r non passante per un vertice, è facile decidere se vi sono o no coniche tangenti ad r pei quattro punti. Invero basta per ciò esaminare se le due coppie di

punti segate su r da due coppie di lati opposti del quadrangolo, non si separano, oppur sì. Si faccia pure l'osservazione correlativa.

Infine si noti come anche il teorema precedente continui a sussistere ove a due dei quattro punti A, B, C, D si sostituisca un solo punto e la tangente in esso (non passante per uno dei rimanenti), ecc.

CAPITOLO X

Proiettività fra coniche.

§ 66. **Definizione — Teorema fondamentale.** — Si abbia tra due piani α, α' una proiettività π. Se nel piano α è data una polarità Ω, ad un punto P e ad una retta p che sono polo e polare in Ω, verranno sostituiti, per effetto di π, due elementi di α', che si corrisponderanno a loro volta in una nuova polarità Ω', trasformata di Ω:

$$\Omega' \equiv \pi\,\Omega\,\pi^{-1}.$$

Se la Ω ammette una conica fondamentale K, anche la Ω' ammetterà una conica fondamentale K', i cui elementi corrisponderanno biunivocamente a quelli di K.

Dunque, *se si pone una proiettività tra due piani, ad ogni conica dell' uno corrisponde nell' altro una conica, e le due coniche risultano riferite fra loro elemento per elemento:* precisamente ai punti dell'una conica corrisponderanno i punti dell' altra (e alle tangenti le tangenti), se la proiettività posta fra i due piani è una omografia; ed invece ai punti dell' una corrisponderanno le tangenti dell'altra, se la detta proiettività è una correlazione.

Due coniche si dicono proiettive, allorchè si pensano riferite elemento per elemento mediante una proiettività

fra i piani che rispettivamente le contengono. La proiettività fra le coniche si dice *subordinata* di quella fra i due piani.

Come esempio si ha: Sono proiettive due coniche giacenti in piani diversi, l'una proiezione dell'altra da un (dato) punto esterno, cioè due coniche sezioni di uno stesso cono quadrico.

Dalla definizione risulta immediatamente:

Due coniche proiettive ad una terza sono proiettive fra di loro.

Se tra due coniche K, K' è data una proiettività, in cui ai punti dell'una corrispondono le tangenti dell'altra, risulta anche fissata una proiettività, in cui ai punti di ciascuna corrispondono i punti di contatto delle tangenti omologhe dell'altra. Basta, infatti, osservare che, mediante la sua polarità, una conica può essere riferita proiettivamente a sè stessa, facendo corrispondere ad ogni punto la relativa tangente.

Di qui si deduce che nello studio della proiettività fra coniche ci si può limitare, senza restrizione, al caso in cui gli elementi corrispondenti sieno omonimi. Così appunto faremo nel seguito.

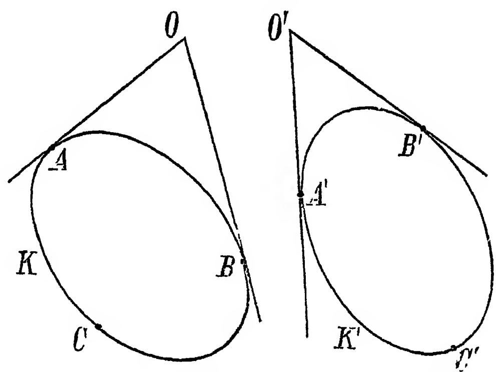
Stabiliamo ora il teorema fondamentale:

Due coniche possono riferirsi proiettivamente in un modo determinato, facendo corrispondere a 3 punti (o a 3 tangenti) dell'una, 3 punti (o 3 tangenti) dell'altra.

Sieno K, K' due coniche, ed ABC, $A'B'C'$ due terne di punti date rispettivamente su di esse. Sieno O, O' i poli delle rette AB, $A'B'$ rispetto a K, K'.

Se esiste tra le due coniche una proiettività, in cui si corrispondono le coppie di punti AA', BB', CC', tale proiettività viene subordinata da un'omografia che fa corrispondere ai punti A, B, C, O del piano di K, rispettivamente i punti A', B', C', O' del piano di K'. Ora esiste tra i

piani delle due coniche un' omografia $\begin{pmatrix} A & B & C & O \\ A' & B' & C' & O' \end{pmatrix}$ definita dalle nominate quaterne di punti omologhi. In questa omografia alla conica K del primo piano viene a corrispondere, nel secondo piano, una conica passante per A', B', C' e tangente alle $O'A'$, $O'B'$. Questa conica non può dunque differire dalla K' (§ 63), e perciò le coniche K, K' risultano riferite proiettivamente nell' omografia, in modo che A,A'; B,B'; C,C' si corrispondono.



Così è dimostrato il teorema.

I fasci di raggi che proiettano i punti omologhi di due coniche proiettive da due punti, comunque scelti rispettivamente su di esse, sono proiettivi.

Le punteggiate segate dalle tangenti omologhe di due coniche proiettive su due tangenti, comunque scelte, di esse, sono proiettive.

Dimostriamo la proposizione a sinistra.

Sieno K, K' due coniche proiettive e π l' omografia fra i due piani, di esse, in cui si corrispondono. Ad ogni punto A di K corrisponde (per effetto di π) un punto A' di K', ed i fasci che proiettano rispettivamente da A, A' i punti omologhi delle due coniche, si corrispondono in π, e perciò sono proiettivi. Ora, se su K' si sceglie un altro qualunque punto B, e da esso si proiettano i punti di K', si ottiene un fascio proiettivo a quello che proietta i medesimi punti da A', e quindi proiettivo al fascio che proietta da A i corrispondenti punti di K, *c.d.d.*

Osservazione. — Quando si parla della proiezione dei punti di una conica fatta da un punto A di essa, s'intende sempre che « il raggio proiettante A da A » vada sostituito colla tangente in A.

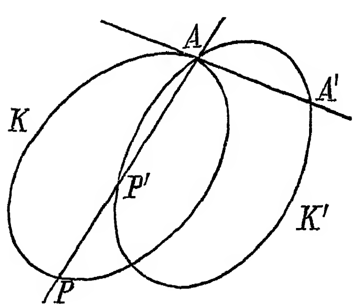
Con ciò la corrispondenza tra la conica ed il fascio (ad essa prospettivo) riesce senza eccezione.

Per riferire proiettivamente due coniche K, K', basta far corrispondere a 3 punti A,B,C dell'una, rispettivamente 3 punti A',B',C' dell'altra, e dopo ciò la proiettività fra le due coniche risulta fissata; allora, se si considerano due fasci di raggi, coi centri su K, K', rispettivamente prospettivi alle due coniche, essi risultano proiettivi tra loro. Siccome d'altra parte la proiettività fra i detti fasci risulta essa pure determinata, ove si facciano corrispondere i raggi dell'uno proiettanti A, B, C, a quelli dell'altro proiettanti A', B', C', così si conclude che il teorema dato innanzi è invertibile; ossia:

Se due coniche sono riferite in modo che i loro punti omologhi vengano proiettati rispettivamente da due punti di esse secondo fasci proiettivi, le due coniche sono proiettive.

Se due coniche sono riferite in modo che le loro tangenti omologhe vengano segate rispettivamente da due tangenti di esse secondo punteggiate proiettive, le due coniche sono proiettive.

Questi teoremi riducono la costruzione della proiettività fra due coniche a quella della proiettività tra le forme di prima specie.

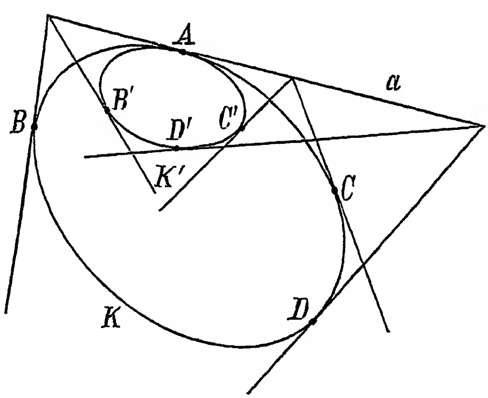


Corollario 1.° — Sono proiettive due coniche K,K' di uno stesso piano, aventi un punto comune A, che vengano riferite mediante una proiezione da A, cioè facendo corrispondere ad ogni punto P dell' una il

punto P' dell'altra allineato con A. Al punto A considerato su K corrisponde l'intersezione (ulteriore) della tangente a K in A, con K'. In particolare se le due coniche hanno in A la stessa tangente, il punto comune A risulta unito nella proiettività tra di esse, e viceversa.

Corollario 2.° — Se due coniche aventi una tangente in comune (giacenti o no in un medesimo piano) sono riferite fra loro, facendo corrispondere le (ulteriori) tangenti condotte ad esse rispettivamente da un punto della tangente comune, le coniche risultano proiettive.

In particolare, si abbiano due coniche K, K' giacenti in piani diversi ed aventi comune una tangente e il relativo punto di contatto A; si abbiano cioè due coniche tangenti in A. Riferendole tra loro nel modo detto innanzi, risulta posta tra di esse una proiettività siffatta, che le tangenti omologhe s'incontrano (su a) e quindi determinano altrettanti piani. Ora si consideri il punto O, determinato da tre di questi piani tangenti a K, K', rispettivamente nei punti (corrispondenti) D, D'; B, B'; C, C'. Proiettando da O una delle due coniche, per esempio K', sul piano dell'altra, si avrà una conica proiezione passante per B, C, D e tangente in A ad a, la quale non potrà differire da K.



Risulta così dimostrato che:

Due coniche tangenti, poste in piani diversi, si possono riguardare come proiezione l'una dell'altra da un

certo punto O, pel quale passano tutti i piani determinati dalle tangenti di esse che s'incontrano sulla tangente comune.

Od anche: *Due coniche tangenti, non giacenti nello stesso piano, sono sezioni di un medesimo cono quadrico.*

* Si deduce: *Ogni conica può essere riguardata come proiezione di un cerchio posto in un diverso piano e tangente ad essa.*

Ossia: *Ogni conica si può riguardare come sezione di un cono circolare, retto od obliquo;* onde il nome di « conica. » Si desume di qui una conferma delle proposizioni di natura intuitiva stabilite relativamente alla forma delle coniche.

§ 67. **Proiettività sopra una conica - Teorema d'Apollonio.** — Il concetto di proiettività tra due coniche si applica ancora a due coniche sovrapposte, nel qual caso si ha una *proiettività sopra una conica.*

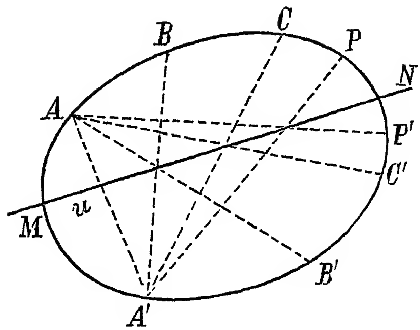
Si può allora parlare di proiettività inversa, di involuzione, di punti uniti, e quindi di proiettività iperbolica, ellittica o parabolica, ecc.: precisamente come sulle forme di 1.ª specie.

Le costruzioni della proiettività sopra una conica si possono eseguire semplicemente nel modo seguente:

Sieno date sulla conica K tre coppie di punti corrispondenti AA', BB', CC' che servono a fissare la proiettività. Volendo che tale proiettività non sia identica, supporremo che una almeno delle dette coppie, p. e. AA', sia costituita di punti distinti.

Se immaginiamo di proiettare da A' i punti B, C.... della conica, e da A i corrispondenti B', C'...., otteniamo due fasci proiettivi di raggi, aventi il raggio comune AA unito e perciò prospettivi. Le rette omologhe dei due fasci s'incontrano nei punti d'una retta u. Ciò posto, il corrispondente P' di un punto P dato su K, si ottiene proiet-

tando P da A' su u, e da A sulla conica il nuovo punto ottenuto. *La retta* u *non varia se in luogo di* A. A′ *si scelgono, per la costruzione, due altri punti distinti* B, B′, *corrispondenti nella proiettività;* essa dicesi *l' asse di collineazione della proiettività*



L' affermazione precedente si giustifica, osservando che la u e la retta Pascal dell' esagono $AB'CA'BC'$ iscritto nella conica, e perciò anche le rette BC', $B'C$ (e le analoghe) s'incontrano su di essa.

Correlativamente si avrà:

Se a, a′; b, b′; c, c′ ... *sono tangenti distinte, corrispondenti in una proiettività sopra una conica, le rette che uniscono i punti* ab′, a′b, ac′, a′c; bc′, b′c, .. *passano per un punto fisso, detto centro di collineazione della proiettività.*

Mediante la polarità rispetto alla conica, due punti corrispondenti si mutano in due tangenti corrispondenti, ecc., quindi l' asse di collineazione di una proiettività sulla conica si muta nel centro di collineazione, ossia:

Il centro e l' asse di collineazione di una proiettività (non identica) data sopra una conica, sono polo e polare rispetto alla conica.

La considerazione degli elementi di collineazione di una proiettività sopra una conica ha essenziale importanza per la determinazione degli elementi uniti. Risulta infatti dalle costruzioni assegnate innanzi che:

L' asse di collineazione d'una proiettività (non identica) *sopra una conica, in-*

Le (eventuali) *tangenti alla conica, condotte pel centro di collineazione d' una*

contra (eventualmente) *la conica nei punti uniti della proiettività.*

Il detto asse è dunque una retta secante, tangente, o esterna, secondochè la proiettività sopra la conica è iperbolica, parabolica o ellittica.

proiettività (non identica) *sopra di essa, sono le tangenti unite della proiettività.*

Il detto centro è dunque un punto esterno, un punto della conica, o un punto interno, secondochè la proiettività sopra la conica è iperbolica, parabolica o ellittica.

Una proiettività sopra una conica viene subordinata da un' omografia del piano, che trasforma in sè stessa la conica.

In questa omografia il centro e l' asse di collineazione sono sempre elementi uniti. Anzi, si vede subito, che essi sono elementi uniti associati tenendo presenti i §§ 49 e 57.

Si può assumere ad arbitrio l' asse o il centro di collineazione d' una omografia piana, che debba trasformare in sè stessa una conica, e dopo ciò si possono ancora assumere due punti corrispondenti sulla conica (fuori dell' asse di collineazione) per determinare l' omografia.

Infatti la proiettività sopra la conica K innanzi considerata veniva determinata ed in modo unico (mediante la sua costruzione), dati due punti corrispondenti A, A' e l' asse di collineazione.

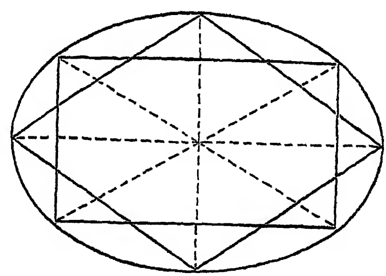
* Se, in particolare, si sceglie come asse di collineazione la retta all' infinito, si avranno infinite *affinità piane trasformanti in sè stessa la conica,* ed aventi come centro di collineazione il centro (proprio od improprio) di essa. Esiste *un'* affinita così fatta nella quale si corrispondono due punti propri dati ad arbitrio sulla conica. Riferendosi al caso di coniche a centro, è facile vedere che *le nominate affinità sono equivalenti* (§ 50). Infatti, se la conica data è un' ellisse, una tale affinità trasforma in sè stessa la regione dei punti interni ad essa, la quale

si può riguardare come un'area (finita) limite di due serie convergenti di poligoni (finiti) iscritti e circoscritti; ciò invero si deduce considerando l'ellisse come proiezione di un cerchio. Se invece la conica data è un'iperbole, l'affinità nominata trasforma un triangolo formato dagli asintoti e da un'altra tangente, in un triangolo analogo: poichè due triangoli siffatti sono sempre equivalenti (§ 62), si conclude anche in questo caso che la detta affinità è equivalente

Riferendosi al caso dell'ellisse, si deduce il

Teorema d'Apollonio. — *Tutti i parallelogrammi iscritti in un'ellisse, aventi come diagonali due diametri coniugati, sono parallelogrammi equivalenti.*

Si considerino infatti due parallelogrammi le cui diagonali sieno diametri coniugati. L'affinità equivalente trasformante in sè la conica, che fa corrispondere ad un vertice di un parallelogrammo un vertice dell'altro, farà corrispondere alla coppia dei diametri coniugati costituita dalle due diagonali del primo parallelogrammo, la coppia costituita dalle due diagonali del secondo. Dunque la detta affinità trasforma l'un parallelogrammo nell'altro: segue che i due parallegrammi sono equivalenti, *c.d.d.*



Osservazione. — Risulterà poi provata (§ 70) l'effettiva esistenza di parallelogrammi iscritti in un'ellisse aventi come diagonali due diametri coniugati; mentre apparirà che siffatti parallelogrammi iscritti non esistono per l'iperbole. Giacchè si vedrà che nel primo caso due diametri (qualunque ed in particolare) coniugati sono sempre secanti, determinando due coppie di punti simmetrici rispetto al centro che sono vertici d'un parallelogrammo: invece

nel 2.° caso due diametri coniugati sono l'uno secante e l'altro esterno.

Nondimeno il teorema d'Apollonio verrà esteso all'iperbole sotto altra forma (§ 70).

§ 68 **Involuzione.** — Un' *involuzione* sopra una conica è una proiettività non identica che equivale alla sua inversa, cioè una proiettività nella quale gli elementi omologhi si corrispondono in doppio modo.

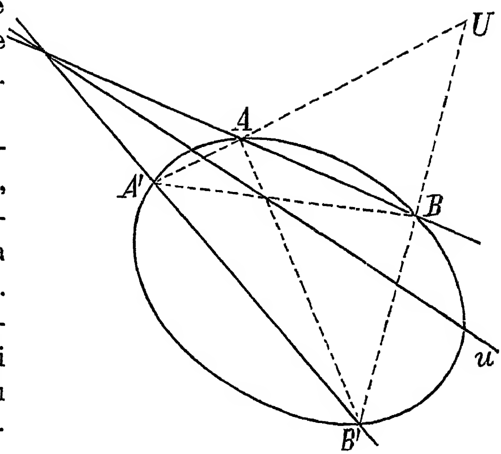
Si abbia sulla conica K un' involuzione, e si consideri l'omografia che trasforma K in sè stessa, dalla quale l'involuzione viene subordinata. Le rette congiungenti i punti coniugati della conica sono unite per l'omografia, e così sono uniti i punti sezioni delle tangenti coniugate (tangenti nei punti coniugati), sicchè l'omografia (non identica) avendo infinite rette unite ed infiniti punti uniti, è una omologia.

Segue che le congiungenti i punti coniugati della involuzione sulla conica, passano pel centro U dell' omologia; ed anche che le tangenti coniugate s' incontrano sull' asse u dell' omologia, il quale risulta dunque polare di U rispetto alla conica (§ 57).

L'omologia in questione e l'omologia armonica o involutoria (§ 48) che ha come centro U ed asse u, perche due punti corrispondenti, scelti sulla conica, (e quindi anche due punti corrispondenti qualunque), separano armonicamente U e l'intersezione della loro congiungente con u.

Si vede poi facilmente che u è l'asse di collineazione della proiettività sulla conica, ed U ne è il centro di collineazione (§ 67). Infatti se AA', BB' sono coppie di punti coniugati (allineati con U), le rette AB', BA' e (per la corrispondenza in doppio modo) le AB, $A'B'$ s' incontrano sull' asse di collineazione, sicchè questo viene individuato dalle intersezioni delle nominate coppie di rette. Ma tali intersezioni di rette corrispondenti cadono anche sull' asse

di omologia u, ed egualmente lo determinano; dunque u è precisamente l'asse di collineazione della proiettività. *c. d. d.*



Correlativamente U, suo polo, è il centro di collineazione della stessa proiettività.

Possiamo riassumere i risultati ottenuti innanzi enunciando il teorema:

Un' involuzione sopra una conica viene subordinata da una omologia armonica, che trasforma in sè stessa la conica, omologia avente come centro ed asse il centro e l' asse di collineazione dell' involuzione.

Ed anche:

Un' involuzione sopra una conica-luogo è costituita dalle coppie di punti della conica, allineate con un centro fisso (centro di collineazione).

Questo punto è esterno o interno secondo che l'involuzione è iperbolica od ellittica.

Un' involuzione sopra una conica inviluppo è costituita dalle coppie di tangenti alla conica intersecantisi nei punti di una retta fissa (asse di collineazione).

Questa retta è secante od esterna secondo che l'involuzione è iperbolica od ellittica.

Data una conica:

Ogni punto O del piano, che non le appartenga, può essere preso come centro di

Ogni retta o del piano, che non le appartenga, può essere presa come asse di

collineazione di una involuzione sopra la conica stessa.

Questa involuzione si può infatti riguardare come determinata da due coppie di punti della conica allineati con O. Di tali coppie se ne trova sempre una su ogni retta che unisca il punto O con un punto qualunque della conica: solo se la retta considerata è una delle due (eventuali) tangenti per O alla conica, la nominata coppia di punti coniugati si riduce ad un punto, doppio per l'involuzione.

collineazione di una involuzione sulla conica stessa.

Questa involuzione si può infatti riguardare come determinata da due coppie di tangenti alla conica intersecantisi su o. Di tali coppie se ne trova sempre una per ogni punto sezione di o con una tangente qualunque alla conica; solo se il punto considerato è uno dei due (eventuali) punti della conica su o, la nominata coppia di tangenti coniugate si riduce ad una unica retta, doppia per l'involuzione.

Osservazione. — Alle proiettività sopra una conica, e quindi in particolare alle involuzioni, si estendono senz'altro i teoremi relativi al senso della corrispondenza, stabiliti per le forme di 1.ª specie (§§ 31, 37) Così ogni proiettività discorde. sopra una conica, è iperbolica. Una involuzione sopra una conica è ellittica e concorde, se due coppie qualsiasi di punti coniugati si separano; invece è iperbolica e discorde nel caso opposto, ecc.

In generale si può dire che si estendono alle coniche (e così pure ai coni quadrici) tutte quelle proprietà che sono relative alle forme di 1.ª specie, considerate in sè stesse, astraendo dai rapporti col rimanente spazio.

Perciò giova spesso di raccogliere le forme di 1.ª specie e le coniche (e i coni quadrici) sotto la denominazione comune di *forme elementari* (rispettivamente del 1.° e 2.° ordine).

§ 69. **Punti esterni ed interni, rette secanti ed esterne.** — Dal § precedente risulta:

Data una conica

ed un punto O *che non le appartenga, si può vedere se esso sia esterno od interno, esaminando se l'involuzione sulla conica, avente* O *come centro di collineazione, sia iperbolica od ellittica.*

ed una retta o *che non le appartenga, si può vedere se essa sia secante od esterna, esaminando se l'involuzione sulla conica, avente* o *come asse di collineazione, sia iperbolica od ellittica.*

Occorre perciò vedere se le coppie di elementi coniugati nella detta involuzione si separano o no.

D' altra parte, secondo un criterio precedentemente stabilito (§ 56):

Per vedere se

O *risulti esterno od interno, si deve esaminare la natura dell' involuzione di rette coniugate rispetto alla conica nel fascio di centro* O.

o *risulti secante od esterna, si deve esaminare la natura dell' involuzione di punti coniugati rispetto alla conica sulla punteggiata di sostegno* o.

Ora i due criteri di giudizio, che così risultano, non possono naturalmente condurre a conclusioni differenti.

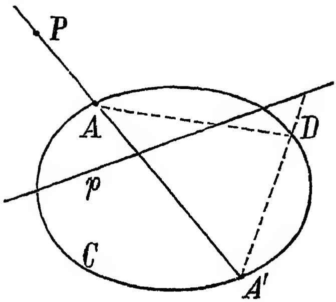
Ciò è chiaro a priori, ma si verifica anche immediatamente, poichè:

Se si proiettano da un punto della conica le coppie di un' involuzione, sopra l' asse di collineazione, si ottengono su questa retta coppie di punti coniugati rispetto alla conica.

Se si segano con una tangente alla conica le coppie di tangenti di un' involuzione, ed i punti così ottenuti si proiettano dal centro di collineazione, si ottengono coppie di rette coniugate rispetto alla conica.

Queste proposizioni non sono che una diversa espressione del teorema di Staudt (§ 60).

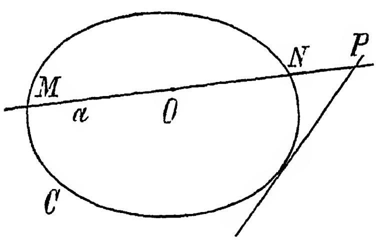
Invero (a sinistra) sia p la polare di P, centro di collineazione della data involuzione su C; e sieno A, A' due punti di C allineati con P; D un terzo punto di C. Allora (per quel teorema) la retta p, coniugata al lato AA' del triangolo iscritto $AA'D$, sega AD, $A'D$ in punti coniugati, ossia le proiezioni di due punti di C allineati con P, fatte da D su p, sono due punti coniugati, c. d. d.



Ogni retta passante per un punto interno alla conica è secante.

Ogni punto d'una retta esterna alla conica è esterno ad essa.

Limitiamoci a dimostrare il teorema a sinistra.



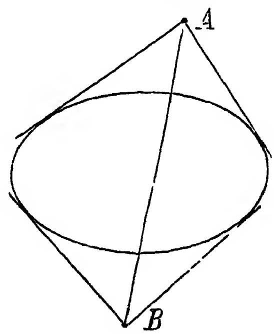
Sia O un punto interno alla conica C, ed a una retta per esso Su a vi sono sempre dei punti esterni a C, sezioni di a con una tangente, il cui punto di contatto è fuori di a: sia P un punto di a esterno a C. Le due involuzioni sopra la conica, aventi come centri di collineazione O, P, sono l'una ellittica, l'altra iperbolica, dunque hanno una coppia comune, costituita da due punti di C su a. E però a è segante. c. d. d.

Osservazione. — La proposizione precedente traduce in sostanza, sotto una forma evidente rispetto all'intuizione, il teorema sulla coppia comune a due involuzioni, dato nel § 37. Basta riferire questo teorema ad involu-

zioni sopra una conica invece che sopra una forma di 1.ª specie, il che è perfettamente indifferente, trattandosi di proprietà ugualmente valide per tutte le forme elementari (secondo l'osservazione del precedente §).

Ora i due casi del citato teorema « una involuzione ellittica ed una iperbolica hanno una coppia comune », « due involuzioni ellittiche hanno una coppia comune », vengono a corrispondere rispettivamente alle proposizioni intuitive « congiungendo un punto interno ad una conica con un punto esterno si ha una retta secante » e « congiungendo due punti interni ad una conica si ha una retta secante ».

Nel § 38 si è notata la condizione perchè due involuzioni iperboliche, di una stessa forma di 1.ª specie, abbiano una coppia comune: occorre e basta che le coppie di punti doppi non si separino (oppure abbiano un elemento comune). Applicando questa proposizione alle coniche, si deduce una proprietà che è pure evidente rispetto all'intuizione:



Data una conica, e due punti A,B, esterni, che non si trovino sopra una tangente, la condizione perchè la retta AB riesca secante e che le coppie di tangenti condotte da A, B, alla conica (ossia le coppie dei punti di contatto) non si separino.

Sussistono i teoremi correlativi:

Data una conica,

sopra una retta secante, i due punti della conica determinano due segmenti complementari, uno dei quali è costituito di punti interni

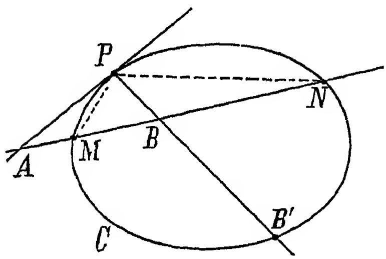
in un fascio di raggi col centro esterno, le due tangenti determinano due angoli complementari, uno dei quali è costituito di rette

alla conica, l' altro di punti esterni.

secanti la conica, l' altro di rette esterne.

Stabiliamo l' enunciato a sinistra:

Sia C una conica, ed MN una retta che la seghi nei punti M, N. Su questa si può considerare un punto A esterno a C, sezione di una tangente a C nel punto P, diverso da M, N. Sia B un punto del segmento MN, che non contiene A, e sia B' l' ulteriore intersezione di PB colla conica C. Il gruppo di punti della conica $PMB'N$, è proiettivo al gruppo delle quattro rette $P(AMB'N)$, quindi le coppie PB', MN si separano (sulla conica); segue, che l' involuzione su C, che ha come centro di collineazione B, è ellittica; dunque B è interno.



Se invece B si fosse preso nel segmento MAN, si sarebbe provato analogamente che esso è esterno a C.

Osservazione. — La proposizione precedente è perfettamente conforme alla nozione intuitiva che, fino da principio, ci siamo formati dei punti interni ed esterni rispetto ad una conica.

In una forma elementare le infinite coppie di elementi aventi un elemento fisso si possono riguardare come costituenti un' *involuzione degenere*. Allora un punto d' una conica può riguardarsi come il centro di collineazione di un' involuzione degenere.

In un' involuzione degenere vi è *un* punto doppio, vale a dire le involuzioni degeneri sono paraboliche.

Si può dire che le involuzioni degeneri *separano* le involuzioni ellittiche da quelle iperboliche, conformemente alla locuzione che i punti della conica separano le due regioni di punti, esterni ed interni.

§ 70. ***Diametri reali ed ideali - Vertici.** — Nel caso dell'ellisse il centro è interno, quindi le rette pel centro di essa sono secanti, ossia:

Ogni diametro della ellisse sega l'ellisse in due punti.

Per l'iperbole i diametri diversi dagli asintoti si dividono in *diametri reali* (secanti). ed in *diametri ideali* (esterni). *I diametri reali formano uno degli angoli degli asintoti; i diametri ideali, l'altro.*

Due diametri coniugati sono l'uno reale, l'altro ideale, giacchè essi debbono separare armonicamente gli asintoti.

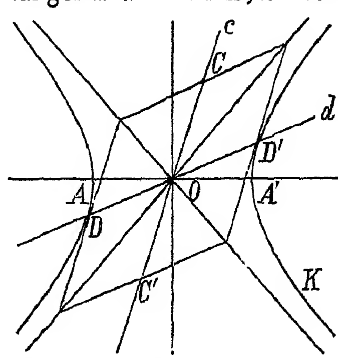
Si può estendere la denominazione di *reali* a tutti i diametri dell'ellisse.

Allora si può dire: Nell'ellisse gli assi (§ 59) sono reali. Nell'iperbole un asse è reale, l'altro ideale; il primo dicesi *asse trasverso* o *principale.*

Definiamo ora, per ogni conica a centro, la *lunghezza di un diametro.*

Anzitutto la lunghezza di un diametro reale e la lunghezza del segmento (finito) che ha per estremi (*estremi del diametro*) le intersezioni di esso colla conica.

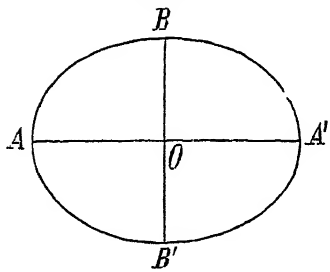
Ora si consideri un'iperbola K ed un diametro ideale c di essa. Sia d il diametro coniugato a c, e D, D' i punti in cui esso incontra K. Le tangenti a K in D, D' sono parallele a c ed incontrano gli asintoti in due coppie di punti, simmetriche rispetto al centro O di K, che sono vertici di un parallelogrammo avente come diagonali gli asintoti stessi, e come mediane i diametri coniugati c, d. La lunghezza CC' della mediana c (ossia la lunghezza del lato del parallelogrammo, parallelo a c) si dirà « lunghezza del diametro ideale c ».



Per ragione di limite la lunghezza di un asintoto dell'iperbole si deve riguardare come infinita.

I punti C, C' segnati nella figura si possono chiamare gli *estremi del diametro ideale* c.

Le intersezioni degli assi colla conica diconsi *vertici*.



L'ellisse ha quattro vertici (eccepito il caso del cerchio, in cui tutti i punti si possono riguardare come vertici), ed i segmenti AA', BB', che essi comprendono, costituiscono le *lunghezze degli assi.* Di tali lunghezze, una sarà, in generale, maggiore, e l'asse corrispondente verrà detto *asse maggiore* o *principale*, mentre l'altro verrà detto *asse minore.*

L'ellisse che ha due assi uguali è un cerchio. Infatti, in tale ipotesi, si può costruire un cerchio passante pei 4 vertici dell'ellisse, il quale riesce tangente ad essa in questi punti, e perciò non può differire dall'ellisse stessa.

L'iperbole ha due vertici. Il segmento AA' da essi compreso costituisce la *lunghezza dell'asse trasverso*, mentre la *lunghezza dell'asse non trasverso* vien data dall'altra mediana del rettangolo, di cui AA' è una mediana e gli asintoti sono le diagonali.

L'iperbole che ha i due assi uguali è equilatera. Infatti, in questo caso gli asintoti, essendo le diagonali di un quadrato, riescono tra loro perpendicolari.

La parabola ha un vertice proprio (ed uno improprio) intersezione dell'asse colla conica; per essa non vi è luogo a considerare la lunghezza dei diametri (che sono infiniti).

OSSERVAZIONE 1.ª — Nell'ellisse (eccepito il caso del cerchio) le lunghezze dei diametri variano, crescendo (con continuità) da un minimo ad un massimo, che corrispondono alle lunghezze dei due assi.

Nell' iperbole le lunghezze dei diametri reali hanno soltanto un minimo, dato dalla lunghezza dell' asse trasverso, mentre le lunghezze dei diametri ideali hanno pur esse un minimo, che e la lunghezza dell'asse non trasverso.

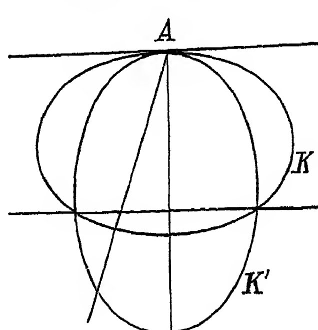
Osservazione 2.ª — Riferendosi alla fig. della pag. 257 si vede che i parallelogrammi aventi come diagonali CC', DD', (metà dei parallelogrammi aventi come mediane CC', DD') hanno area costante (§§ 62, 67). Si ha così *l'estensione all' iperbole del teorema d'Apollonio* già dato per l'ellisse. Questo teorema può ora enunciarsi dicendo.

Data una conica a centro, i parallelogrammi aventi come vertici gli estremi di due diametri coniugati sono tutti fra loro equivalenti.

§ 71. **Coniche omologiche. - Applicazioni. - Area dell' ellisse** — Se due coniche K, K' di un piano sono omologiche, ossia se esse si corrispondono in un' omologia, ed il centro O di questa appartiene ad una (K) delle due coniche. O, corrispondendo a sè stesso, appartiene anche all' altra (K'), ed è un punto di contatto per le due coniche (§ 66)

Viceversa:

Due coniche di un piano tangenti in un punto, si corrispondono in una determinata omologia, che ha come centro il punto di contatto; e correlativamente si corrispondono pure in un'omologia, che ha come asse la tangente in quel punto.



Dimostriamo la prima parte dell' enunciato.

Sieno K, K' le due coniche; A il loro punto di contatto. Riferiamo proiettivamente le due coniche mediante il fascio A ad esse prospettivo (§ 66):

la proiettività tra di esse verrà subordinata da un'omografia determinata, per la quale A sarà un punto unito e tutte le rette per A saranno unite. Questa omografia è dunque una omologia di centro A, che trasforma l'una nell'altra le due coniche. Tale omologia è evidentemente unica.

Osservazione. — L'asse della prima omologia è una retta che incontra (eventualmente) negli stessi punti (uniti) le due coniche. Correlativamente il centro della seconda omologia, menzionata nell'enunciato, è un punto pel quale passano (eventualmente) le stesse tangenti alle due coniche.

Corollario. * — *Due parabole aventi gli assi paralleli sono omologiche affini ed omotetiche.*

Se due coniche K, K' sono omologiche, ed il centro O d'omologia è esterno ad una di esse, esso e esterno anche all'altra, e le due coniche hanno le medesime tangenti per O; inoltre le rette per O, secanti rispetto a K, saranno anche secanti rispetto a K'. Siccome queste secanti formano uno degli angoli delle due tangenti comuni a K,K' (§ 69), si potrà dire che le due coniche risulteranno *iscritte nello stesso angolo.* Valgono le osservazioni correlative.

Viceversa possiamo stabilire i teoremi:

Se due coniche di un piano sono iscritte in uno stesso angolo (formato da due tangenti comuni) *esse si possono riferire omologicamente in due modi, prendendo come centro d'omologia il vertice dell'angolo nominato.*

Se due coniche di un piano hanno due punti comuni e comprendono come segmento interno lo stesso segmento (determinato dai due punti comuni) *esse si possono riferire omologicamente in due modi, prendendo come asse la congiungente i detti punti.*

L'asse di ciascuna di queste omologie segherà

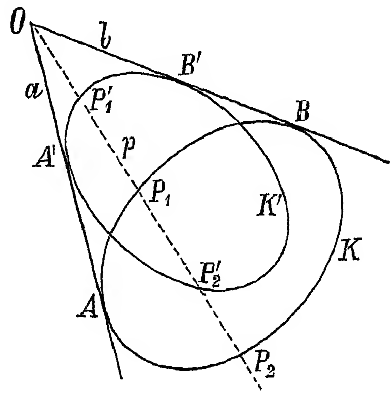
Pei centri di queste omologie passeranno le

(eventualmente) *le due coniche negli stessi punti.*

(eventuali) *coppie di tangenti comuni alle due coniche.*

Riferiamoci all'enunciato a sinistra.

Sieno K e K' le due coniche aventi comuni le tangenti a, b; e sieno A, A' e B, B' i rispettivi punti di contatto di a, b con K, K'; infine sia $O \equiv ab$.



Si consideri per O una qualsiasi secante p di K la quale (essendo K, K' iscritte nello stesso angolo $a\,b$) risulta secante anche di K', sieno P_1, P_2 le sue intersezioni con K, e P_1', P_2' le sue intersezioni con K'. Se esiste una omologia di centro O che trasforma una delle due coniche K, nell'altra K', questa omologia deve far corrispondere ad A, B rispettivamente A', B', ed alla coppia $P_1 P_2$ la coppia $P_1' P_2'$, quindi a P_1 deve fare corrispondere P_1', oppure P_2'.

Ora, se facciamo per esempio corrispondere al punto P_1 di K, il punto P' di K', e ad A, B rispettivamente A', B', resta fissata tra K, K' una proiettività; questa viene subordinata da un'omografia che trasforma K in K'; ma tre rette per O (le a, b, p) sono unite, dunque l'omografia nominata è un'omologia di centro O.

Ciò dimostra il teorema.

Si può fare una prima applicazione importante dei resultati precedenti, proponendosi la determinazione delle coniche di un piano che toccano due rette date e passano per 3 punti dati, non appartenenti ad esse e non giacenti in linea retta.

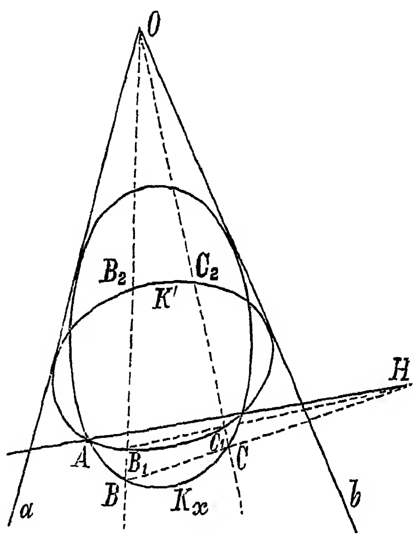
Affinchè il problema sia risolubile è anzitutto necessario che i 3 punti dati sieno interni ad uno stesso angolo

delle due rette (inteso sempre l'angolo nel senso grafico del § 5), perchè la conica da costruirsi, supposta esistente, riuscirà tutta iscritta in un angolo delle due tangenti assegnate.

Ciò posto, sieno a, b le due rette, ed A, B, C i tre punti, soddisfacenti alle condizioni indicate.

Si consideri una conica qualsiasi K' la quale tocchi a, b, e passi per A: si designi poi con K_x una conica, supposta esistente, che tocchi a, b, e passi per A, B, C.

La K' e la K_x saranno riferite in una omologia ben determinata avente come centro $O \equiv ab$, e per la quale A sarà un punto (unito) dell'asse.



In questa omologia, al punto B, corrisponderà uno dei due punti B_1, B_2, in cui la OB sega K; sia per esempio B_1. Così a C corrisponderà uno dei due punti C_1, C_2, in cui OC sega K': sia per esempio C_1 L'asse della omologia sarà dunque la retta che congiunge A col punto $H \equiv (BC).(B_1C_1)$.

Ora, facendo corrispondere al punto B il punto B_1 o il punto B_2, ed a C, C_1 o C_2, si ottengono 4 omologie di centro O, aventi A come punto unito; ciascuna di queste omologie viene perfettamente determinata, come quella innanzi considerata in cui a B, C, corrispondono rispettivamente B_1, C_1.

Ciascuna delle 4 omologie trasforma la K' in una conica (come la K_x) tangente ad a, b, e passante per

A, B, C, e questa conica nasce a sua volta da una sola omologia siffatta.

Si giunge così alla conclusione:

In un piano, esistono 4 coniche che toccano due rette date e passano per 3 punti, non allineati, interni ad uno stesso angolo delle due rette.

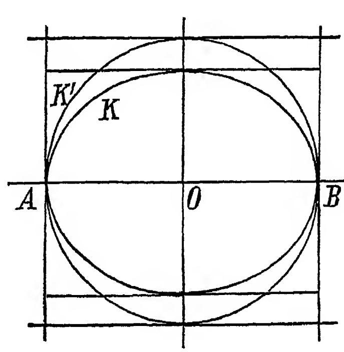
Correlativamente: *esistono 4 coniche che passano per due punti dati e toccano tre rette, non concorrenti, che intersecano in punti interni il medesimo segmento avente come estremi i due punti.*

Osservazione. * — Riferendosi al primo enunciato, e gli elementi dati a, b, A, B, C, supponendosi propri, le 4 coniche risulteranno tutte iperbole se i 3 punti A, B, C non sono interni allo stesso triangolo determinato dalle a, b e dalla retta impropria (ossia se appartengono a due angoli ab opposti al vertice, nel senso della Geometria elementare).

* Una seconda applicazione dei teoremi relativi alle coniche omologiche, si basa sul

Corollario. — *Un' ellisse si può riguardare come omologica affine d' un cerchio, che tocchi due tangenti parallele della ellisse stessa.*

Si considerino le tangenti ad un' ellisse K nei due vertici A, B, situati sull' asse maggiore, ed un cerchio K' che tocchi le due tangenti nei medesimi punti A, B.



L' omologia affine che trasforma K in K', trasforma anche il rettangolo circoscritto all' ellisse, avente i lati paralleli agli assi, nel quadrato circoscritto al cerchio che ha pure i lati paralleli agli assi. Denotando

con a, b, le lunghezze dei due semi-assi dell'ellisse, le aree del rettangolo e del quadrato sono espresse da

$$4\,a\,b \quad \text{e} \quad 4\,a^2.$$

Ora l'area del cerchio K' è $\pi\,a^2$; dunque quella dell'ellisse sarà data dalla proporzione:

$$x : \pi\,a^2 = 4\,a\,b : 4\,a^2.$$

Si ottiene così il resultato:

L'area dell'ellisse di semi-assi a, b, *è:*

$$x = \pi\,a\,b.$$

CAPITOLO XI

Problemi determinati.

§ 72. **Generalità - Problemi di 1.° grado.** — Vogliamo occuparci in questo capitolo di alcuni problemi geometrici *determinati*, e delle *costruzioni* atte a risolverli

Occorrono avanti tutto poche parole di spiegazione sullo scopo e sul significato, secondo cui debbono essere intese tali costruzioni.

Lo scopo che ci proponiamo è essenzialmente pratico. Si tratta di ottenere (costruire), coll'uso di strumenti assegnati, la rappresentazione mediante un disegno, di elementi atti a soddisfare relazioni determinate, rispetto ad altri elementi che si suppongono *dati*.

Limitiamoci alla Geometria del piano, e consideriamo quindi come elementi, i punti e le rette. Abbiamo un foglio le cui dimensioni si possono supporre teoricamente grandi quanto si vuole, il quale rappresenta il piano. In questo foglio si segnano colla matita dei « punti » immagini più o meno approssimate di punti geometrici, ma che si considerano teoricamente non aventi dimensioni; nello stesso piano si tracciano dei segmenti (più o meno prolungati) di « rette ». Si hanno così punti e rette *dati* nel foglio.

Possedendo una *riga* (sufficientemente lunga) si possono congiungere con una retta due punti dati nel foglio, e si può prolungare un segmento rettilineo, comunque piccolo, che sia tracciato nel foglio stesso.

Un punto può esser *dato* fuori del foglio, assegnando due rette, che abbiano una parte nel foglio, e s'incontrino in esso. Mediante la riga, un punto dato fuori del foglio può essere congiunto con un punto segnato nel foglio, con una costruzione che si basa sul teorema dei triangoli omologici; questa costruzione viene appresa insieme all'uso degli strumenti nel disegno.

Una retta può essere *data* fuori del foglio, allorchè sieno dati due punti di essa, nel modo detto innanzi.

Si riesce allora (basandosi pure sul teorema dei triangoli omologici) a dare colla riga il punto d'intersezione di essa con una retta del foglio, tracciando un'altra retta del foglio che passi per quel punto. Infine si può anche determinare in un senso analogo, il punto in cui s'intersecano due rette date fuori del foglio, assegnando due rette del foglio che passino per esso.

Le costruzioni nominate, effettuabili colla riga, sono dette *costruzioni lineari*, e permettono in sostanza di eseguire (nel piano) qualsiasi proiezione e sezione.

Mediante costruzioni lineari si possono *risolvere* numerosi problemi costruttivi determinati: tutti quei *problemi* che diconsi di *1.° grado* (perchè dipendono, nella Geometria analitica, dalla risoluzione di equazioni di primo grado). Di essi abbiamo già avuto molti esempi; anzi sono tali tutti i problemi (della Geometria piana) che abbiamo risoluto fin qui; così: la costruzione del 4.° armonico dopo tre elementi in una punteggiata o in un fascio di raggi; la costruzione della proiettività fra punteggiate o fasci di raggi, o quella dell'omografia o reciprocità fra due piani; la determinazione dell'ulteriore intersezione di una conica con una retta passante per un suo punto già

assegnato; la costruzione dell'ulteriore elemento unito di una proiettività in una forma di 1.ª specie, quando è dato un elemento unito, ecc. ecc.

* Ma già per questi problemi di 1.° grado, come poi per quelli di natura più elevata, si presenta la distinzione fra *problemi grafici* e *problemi metrici*. Nei primi si considerano soltanto relazioni grafiche, mentre nei secondi si tien conto anche di rapporti metrici.

Ora in questi ultimi problemi si debbono riguardare come dati gli enti metrici fondamentali che costituiscono l'assoluto, cioè la retta impropria e l'involuzione assoluta su di essa. Soltanto dopo che questi enti sieno stati dati, i problemi metrici potranno considerarsi indifferentemente come i problemi grafici; e, trattandosi di problemi di 1.° grado, risolversi colla sola riga.

Dare la retta impropria del piano significa (secondo ciò che è stato avvertito innanzi) darne due punti, mediante due coppie di rette (parallele); dunque la retta impropria si dovrà considerare come data, allorchè è segnato nel foglio del disegno un parallelogrammo. Soltanto dopo ciò si potrà effettuare linearmente la costruzione della parallela per un punto ad una retta qualsiasi.

Dare l'involuzione assoluta (sulla retta impropria) del piano, vorrà dire individuarla mediante due coppie di punti coniugati, ossia mediante due coppie di rette ortogonali.

Dunque *si potranno dare gli enti metrici fondamentali del piano assegnando in esso un rettangolo.*

Dopo ciò qualunque problema metrico si potrà trattare come un problema grafico, ponendo in relazione gli altri elementi dati con i nominati enti metrici (cfr. l'osservazione del § 50). In particolare si potrà risolvere colla sola riga ogni problema metrico di 1.° grado.

I problemi tipici di questa categoria sono quelli relativi alla costruzione della parallela o della perpendicolare

condotta per un punto, ad una retta data. Abbiamo già accennato come si risolva il primo di questi problemi; e si riconosce subito come il secondo si riconduca, immediatamente alla costruzione dell'involuzione assoluta, sopra la retta impropria, involuzione che abbiamo appunto individuata.

OSSERVAZIONE. — Si possono istituire nello spazio considerazioni analoghe a quelle istituite relativamente ai problemi della Geometria piana, considerando qui come costruzioni lineari quelle che consistono nella determinazione di elementi « punti, rette e piani », gli uni mediante gli altri, ed introducendo opportuni enti metrici fondamentali, allorchè si tratti di problemi metrici. Ma noi lasceremo da parte tali problemi, che la Geometria descrittiva insegna a trattare sistematicamente, risolvendoli mediante costruzioni da effettuarsi nel piano. Ci riferiremo dunque, nel seguito, a problemi della Geometria piana, e noteremo che il piano in cui si opera può sempre essere scelto ad arbitrio, giacchè sopra di esso possono eventualmente proiettarsi le figure che venissero date in un piano diverso.

§ 73. **Problemi di 2.° grado.** — Si dicono di *2.° grado* quei problemi costruttivi determinati aventi *due* soluzioni al più, la cui risoluzione si può ridurre, mediante proiezioni e sezioni, alla determinazione delle intersezioni di una retta qualunque (del suo piano) con una certa conica fissata. Un problema di 2.° grado riesce determinato o impossibile, secondochè la conica data viene incontrata o no dalla retta con cui deve segarsi; nel 1.° caso ha *due* o *una* soluzione, secondochè la retta è secante o tangente alla conica.

Sono dunque di 2.° grado quei problemi, che si risolvono graficamente coll'uso della sola riga, usando altresì di una conica fissa completamente tracciata, della quale

si possano quindi determinare le intersezioni con ogni retta del suo piano.

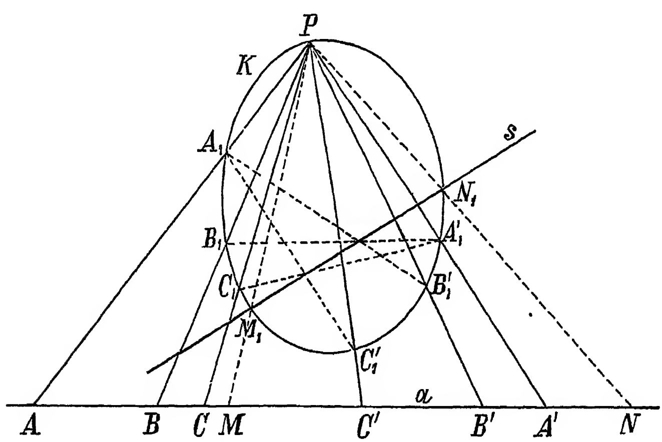
Vedremo poi che questa conica, fondamentale per le costruzioni, può essere sostituita con un'altra presa ad arbitrio.

I problemi di 2.° grado si riconducono analiticamente alla risoluzione di equazioni di 1.° grado e di *una* equazione di 2.° grado, cioè alla estrazione di *un* radicale quadratico.

Sia data, nel piano (in cui operiamo), una conica fondamentale K, completamente tracciata. Allora si possono risolvere graficamente i seguenti problemi di 2.° grado:

1.° Problema. — *Determinare* (ove esistano) *gli elementi uniti di una proiettività posta in una punteggiata o in un fascio di raggi.*

Si può supporre che la forma sia una punteggiata a (eventualmente sezione del dato fascio di raggi).



Su a sieno AA', BB', CC', tre coppie di punti omologhi, che definiscano la proiettività. Da un punto P della conica K si proiettino su K i punti A, B, C, A', B', C', rispettivamente in $A_1, B_1, C_1, A'_1, B'_1, C'_1$. La proiettività $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A'_1 & B'_1 & C'_1 \end{pmatrix}$ che dalla corrispondenza delle due terne resta

fissata su K, è quella che si ottiene segando colla K i raggi proiettanti da P i punti di a che si corrispondono nella proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$. Se su K vi sono punti uniti, questi sono proiettati in punti uniti della proiettività su a, e viceversa.

Ora, i punti uniti della proiettività su K (ove esistano) sono le intersezioni di K coll'asse di collineazione della nominata proiettività (§ 67) e possono costruirsi come intersezioni di tale asse di collineazione s colla conica: proiettati da P su a essi danno (ove esistano) i punti uniti della proiettività $\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix}$, che erano domandati.

Ciò vale ugualmente anche nel caso particolare in cui la proiettività su a sia un'involuzione.

2.° Problema — *Determinare* (ove esistano) *i punti comuni ad una conica, individuata mediante cinque punti* (o cinque tangenti), *e ad una retta; ancora determinare le tangenti condotte alla conica da un punto.*

Sieno A, B, C, D, E cinque punti che definiscono una conica (di cui tre non in linea retta) ed a una retta del piano, non passante per uno di essi, di cui vogliamo le intersezioni (ove esistano) colla conica.

Proiettando (§ 61) da A, B i punti C, D, E, si ottengono due terne che definiscono la proiettività tra i fasci di raggi A, B generatori della conica $(ABCDE)$. Sulla a, considerata come sezione dei due fasci, resta individuata una proiettività i cui punti uniti (ove esistano) sono le cercate intersezioni di a colla conica $(ABCDE)$, essi si costruiscono dunque usando la costruzione data innanzi.

Nel caso eccepito, in cui a passi per uno dei cinque punti A, B, C, D, E, il problema di trovare l'altra intersezione di a colla conica, è stato già risoluto (linearmente) in più modi (§§ 63, 64). Del resto col metodo qui seguito

esso si ricondurrebbe al problema di costruire l'altro punto unito di una proiettività sopra una retta, dato un punto unito (§ 31).

Per condurre da un punto le tangenti alla conica $(ABCDE)$ (ove esistano) si devono costruire correlativamente i raggi uniti di una proiettività, nel fascio che ha per centro il punto.

Osservazione 1.ª — Se la conica è data mediante 4 punti e la tangente in uno di essi, o mediante 3 punti e la tangente in due di essi, si può sempre applicare la costruzione precedente. Il procedimento correlativo si eseguirà, invece, se la conica è data mediante 5 tangenti o 4 tangenti e il punto di contatto di una di esse, ecc.

Osservazione 2.ª — La risoluzione del problema precedente ci dimostra che:

Ogni problema di 2.° grado risolubile graficamente, quando è data una certa conica fondamentale (tracciata), è anche risolubile ugualmente quando è data in luogo di essa un' altra conica fondamentale. È pure indifferente che si sappiano costruire le intersezioni di una retta qualsiasi colla conica fondamentale, o che si sappiano condurre ad essa le tangenti per un punto qualsiasi. La possibilità di una di queste due operazioni grafiche permette la risoluzione di tutti i problemi di 2.° grado.

Nel 2.° caso bisogna trasformare per dualità le costruzioni che sono da effettuarsi nel primo caso.

In particolare*: *Tutti i problemi grafici di secondo grado si possono risolvere coll' uso di un cerchio fisso,* del quale si sappiano determinare le intersezioni con una retta qualsiasi, o a cui si sappiano condurre le tangenti per un punto qualsiasi. E la scelta di un opportuno cerchio, come conica fondamentale per le costruzioni, corrisponde all' esigenza pratica che la detta conica sia (un' ellisse) tutta contenuta nel foglio del disegno.

3.° Problema. — *Determinare* (ove esistano) *le coniche passanti per 4 punti* (di cui 3 non in linea retta) *e tangenti ad una retta.*

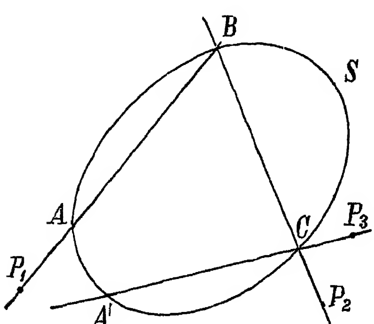
Se la data retta a passa per uno dei 4 punti dati A, B, C, D, ove essa non contenga un altro dei 4 punti, sappiamo (§ 63) che vi è *una* conica così determinata, della quale possono costruirsi quanti si vogliano punti e tangenti. Suppongasi che a non passi per uno dei 4 punti. Su a le intersezioni delle coppie di lati opposti del quadrangolo $ABCD$ appartengono ad una involuzione, i cui punti doppi (ove esistono) sono i punti di contatto delle coniche per A, B, C, D, tangenti ad a (§ 65). Una di tali coniche resta definita, noto il suo punto di contatto con a, perchè allora se ne conoscono 5 punti.

Correlativamente si risolverà il problema correlativo.

Come esempio del cosidetto *metodo dei tentativi* giova considerare il seguente

4.° Problema. — *Iscrivere* (ove sia possibile) *in una conica, un triangolo, i cui lati passino ordinatamente per 3 punti fissati.*

Sia S la conica data, e P_1, P_2, P_3 i tre punti che supponiamo non appartenenti ad essa (tale caso particolare del problema si esaurirebbe facilmente). Si consideri su S un punto A e si unisca con P_1; si determini l'ulteriore intersezione B di S con $P_1 A$, e si unisca B con P_2; si determini l'ulteriore intersezione C di BP_2 con S, e si unisca C con P_3 e si seghi ulteriormente la conica S nel punto A' con la retta CP_3. Se il triangolo ABC iscritto nella conica S soddisfacesse alle condizioni



poste, in modo che fosse appunto AB il lato di esso passante per P_1, dovrebbe A' coincidere con A.

In generale ciò non accadrà, A essendo stato scelto ad arbitrio sulla conica S. Però variando A sulla conica S, varierà anche A', e mediante le costruzioni poste risulterà fissata fra i punti come A, A' una corrispondenza biunivoca; si può vedere facilmente che tale corrispondenza è una proiettività. Infatti i punti A, B della conica (allineati con P_1) si corrispondono nella involuzione che ha per centro di collineazione P_1; così B, C si corrispondono nell'involuzione che ha per centro di collineazione P_2; e C, A' nell'involuzione che ha per centro di collineazione P_3; dunque la corrispondenza fra A, A' che nasce applicando successivamente tre proiettività involutorie su S, è la proiettività prodotto di queste tre involuzioni.

Ciò posto, si applichi a tre punti della conica S la costruzione applicata ad A; risulta allora fissata su S una proiettività i cui punti uniti (se esistono) risolvono il problema. Infatti, un punto unito di essa, preso come punto A e congiunto con P_1 ecc., dà luogo ad un triangolo iscritto in S, i cui lati passano ordinatamente per P_1, P_2, P_3.

I punti uniti della proiettività posta su S si determinano (ove esistano) come intersezioni di S coll'asse di collineazione s della proiettività.

Si possono eseguire per esercizio le costruzioni indicate, individuando la S mediante 5 dei suoi punti e servendosi di una conica fondamentale K del suo piano (ad esempio di un circolo). Questa conica interviene soltanto per determinare le intersezioni di S con s; tutte le altre costruzioni sono lineari.

Osservazione 1.ª — Quando di un problema di 2.° grado è *data* una soluzione, si può ottenere l'altra risolvendo un problema di 1.° grado.

* Osservazione 2.ª — Abbiamo parlato fin qui di problemi di 2.° grado grafici. Trattandosi di problemi metrici

occorre supporre dati a priori gli enti metrici fondamentali del piano.

Ora. secondo il § 72, occorrebbe dare per ciò, oltre la conica fondamentale che si richiede pei problemi di 2.° grado grafici, anche un rettangolo.

Ma, in questo caso, è più semplice di scegliere come conica fondamentale un cerchio e di *dare* la retta impropria per mezzo del centro del cerchio stesso (suo polo); allora resta anche data sulla retta impropria l'involuzione assoluta, come involuzione dei punti coniugati rispetto al cerchio Si può dunque affermare che:

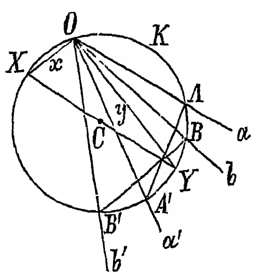
Tutti i problemi di 2.° grado, grafici e metrici, si risolvono linearmente quando è dato un cerchio fondamentale fisso ed il relativo centro.

Come esempio di un problema metrico di 2.° grado, relativo alle coniche, citeremo il seguente:

Problema. — *Costruire gli assi di una conica a centro.*

Anzitutto si può supporre di avere determinato (linearmente) il centro O della conica. e così pure due coppie di diametri coniugati. aa', bb', di essa (per O).

Si ha allora nel fascio O un'involuzione definita dalle coppie aa', bb', della quale si debbono determinare i raggi coniugati ortogonali. Si supponga che il cerchio K fondamentale per le costruzioni, avente un centro dato C, passi per O; sieno A. A' e B, B' i punti in cui esso sega ulteriormente a, a' e b, b'. L'involuzione degli angoli retti del fascio O, segata col cerchio K, determina su di esso un'involuzione il cui centro di collineazione è C (perchè gli angoli retti sono iscritti in un semicerchio).



Ora si deve trovare la coppia comune a questa involuzione ed a quella definita dalle coppie AA' e BB'. Essa si

determina segando il cerchio colla retta che congiunge C al punto d'incontro delle AA', BB' (centro di collineazione della seconda involuzione nominata). Questa coppia comune XY, proiettata da O, fornisce gli assi x, y domandati.

Come esercizio si costruiscano ancora gli asintoti della data conica, supposta un'iperbole (supposto cioè che le coppie aa', bb' non si separino); e si determinino (in ogni caso) i vertici di essa conica.

§ 74. ***Problemi risolubili colla riga e col compasso.** — Il punto di partenza delle nostre costruzioni è stato l'uso dello strumento « riga », il quale permette di effettuare (nel piano) tutte le costruzioni lineari, cioè il tracciamento di rette e la determinazione delle loro mutue intersezioni. Problemi più elevati esigono altre costruzioni, che non si possono più effettuare colla sola riga.

Generalmente queste costruzioni consistono nel tracciamento di « *curve* » più elevate della retta; ed il nominato tracciamento si può far dipendere dall'uso di strumenti di disegno più complessi della riga. Si presentano allora due criteri per la classificazione dei problemi costruttivi:

1) la natura delle curve dal cui tracciamento può farsi dipendere la risoluzione domandata;

2) la natura degli strumenti atti al tracciamento delle nominate curve.

Il primo criterio guarda propriamente alla semplicità delle curve sotto l'aspetto geometrico, mentre il secondo criterio guarda alla semplicità meccanica del tracciamento.

Accanto ai due criteri menzionati se ne può porre un terzo; quello, dato dalla Geometria analitica, dove si guarda alla natura delle operazioni di calcolo, algebriche o trascendenti, da cui si può far dipendere la risoluzione domandata.

Ora, secondo tutti e tre i criteri, si presentano in prima linea i problemi di 1.° grado (grafici e metrici).

Si possono collocare subito dopo i problemi di 2.° grado (grafici e metrici). Invero:

1) Le costruzioni che occorrono per la risoluzione di essi dipendono dalle intersezioni delle rette del piano con un cerchio fisso, di dato centro; ed il cerchio è sotto molti aspetti la linea più semplice, dopo la retta.

2) Il tracciamento del cerchio occorrente all'uopo, si può effettuare nel disegno collo strumento « compasso », che è uno dei più semplici dopo la riga.

3) La risoluzione analitica di tali problemi dipende da un'equazione del 2.° grado (e da equazioni del 1.° grado), ossia richiede soltanto l'estrazione di un radicale quadratico (ed operazioni razionali sulle quantità che corrispondono agli elementi dati); una siffatta estrazione è l'operazione *irrazionale* più semplice che comparisca nell'algebra.

Ai problemi di 2.° grado si possono collegare quelli, componenti una classe più ampia, che, senza essere di 2.° grado, si riducono però a successivi problemi di 2.° grado; ossia i problemi che si risolvono nel disegno coll'uso di una conica fondamentale fissa, la quale, nel caso dei problemi metrici, si suppone essere un cerchio di cui è dato il centro.

Ora questi problemi sono evidentemente risolubili cogli strumenti « riga e compasso »; ma, viceversa, non è chiaro a priori che tutti i problemi costruttivi risolubili colla riga e col compasso si riducano a successivi problemi di 2.° grado, e si risolvano quindi coll'uso della riga e d'un cerchio fisso di dato centro.

Tale fatto può tuttavia essere stabilito. Basta notare che l'uso degli strumenti « riga e compasso » corrisponde alla possibilità di risolvere i due problemi fondamentali seguenti:

1) determinazione delle intersezioni di un cerchio con una retta;

2) determinazione delle intersezioni di due cerchi.

Ora, il primo di questi due problemi è stato già risoluto e ricondotto (nel caso più generale di una conica qualsiasi) alla determinazione delle intersezioni di una retta col cerchio fondamentale fissato a priori. Il secondo problema si riduce al precedente, bastando sostituire ad uno dei cerchi l' asse radicale dei due, il quale si costruisce linearmente.

Resta così stabilito che:

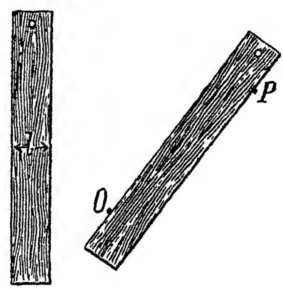
Tutti i problemi costruttivi determinati, che sono risolubili colla riga e col compasso, si possono risolvere colla sola riga e coll' uso di un cerchio fisso di dato centro.

Questo resultato può anche essere espresso sotto un' altra forma, atta a porne in luce l' importanza pratica.

Nelle considerazioni precedenti il cerchio figurava come conica-luogo, ma può supporsi dato invece come conica-inviluppo; in altre parole si può supporre possibile l' operazione del condurre per un punto esterno le tangenti al cerchio fondamentale, invece della operazione correlativa di segare il cerchio con una retta. È questa una immediata conseguenza del principio di dualità nel piano. Del resto, appena si sappia effettuare una delle due operazioni correlative sopra menzionate, si effettuerà subito linearmente l' altra.

Avvertito ciò, potremo riguardare come *dato* un cerchio-inviluppo, allorchè (invece del compasso) si possegga lo strumento « *riga a due bordi* ».

La riga a due bordi permette di costruire una striscia compresa fra due rette parallele, di cui la lunghezza è teoricamente lunga quanto si vuole, e la larghezza l è determinata.



Ora con questo strumento si possono costruire le due tangenti per un punto esterno P, al cer-

chio di centro fissato O che ha come raggio l. Basta infatti fare scorrere la riga in modo che un bordo passi per O, finchè l'altro venga a passare per P, operazione effettuabile in due modi.

Così concludiamo:

Tutti i problemi costruttivi determinati, che si possono risolvere colla riga e col compasso, si possono anche risolvere colla sola riga a due bordi.

Ma, perchè tale conclusione risulti dimostrata vera anche nella pratica, dove la lunghezza della riga a due bordi è finita, occorrerebbe mostrare come la costruzione indicata innanzi relativa ad un punto P troppo lontano da O, si possa sostituire con una costruzione analoga relativa ad un altro punto più vicino ad O Lasceremo da parte la dimostrazione di tale possibilità.

Dopo i problemi di 2.° grado o riducibili a problemi di 2.° grado. i quali si possono risolvere determinando le mutue intersezioni di rette e di cerchi, vi sono altri problemi più elevati che non si possono più risolvere nello stesso modo. Esempi di problemi siffatti compariscono fino dalla Geometria elementare. Basterà ricordare i problemi classici della trisezione dell'angolo, della duplicazione del cubo e della quadratura del circolo, sui quali si sono affaticati invano i geometri greci.

Questi problemi si possono considerare oggi come risoluti, in quanto si è stabilito che la soluzione come era domandata dai greci, col solo uso della riga e del compasso, non è possibile; e d'altra parte si sono trovati strumenti più complessi, capaci di fornirla.

Sebbene l'esame di siffatte questioni esca dal nostro quadro, non possiamo trattenerci dal dedicare ad esse alcune osservazioni, collo scopo di chiarire la nozione di *risolubilità* dei problemi geometrici.

Ogni problema determinato, in tutti quei casi nei quali esistono soluzioni, deve considerarsi risolubile. Ma

la costruzione degli elementi che forniscono la soluzione effettiva può richiedere necessariamente l'uso di linee o di strumenti più elevati di quelli che si hanno a disposizione, ed in questo senso essere *relativamente* impossibile. Così è impossibile risolvere i 3 problemi nominati, tracciando solo rette e circoli e determinando le loro mutue intersezioni, ossia coll'uso degli strumenti « riga e compasso ». Tale impossibilità è posta in luce dalla trattazione analitica di quei problemi. La trisezione dell'angolo e la duplicazione del cubo portano analiticamente alla risoluzione di un'equazione cubica, la quale dovrebbe potersi ottenere con sole estrazioni di radicali quadratici, affinchè i problemi stessi riuscissero risoluti con rette e circoli, invece questa equazione importa generalmente, in modo necessario. l'estrazione di un radicale cubico.

Quanto alla quadratura (o alla rettificazione) del circolo, si tratta di un problema anche più elevato, giacchè esso dipende analiticamente dal calcolo del numero di Ludolf π. Se la quadratura del circolo si potesse ottenere colla riga e col compasso, si potrebbe anche ottenere un'equazione algebrica, a coefficienti razionali, di cui π fosse radice; ed anzi una tale equazione dovrebbe potersi risolvere con sole estrazioni di radicali quadratici. Ora, anche prescindendo dall'ultima condizione, è stato dimostrato dal LINDEMANN (Mathematische Annalen, 1882) che π non soddisfa ad alcuna equazione algebrica a coefficienti razionali. sicchè il problema della sua determinazione (ossia quello della quadratura del circolo) è un problema *trascendente,* invece che *algebrico.*

Ma se i tre problemi classici sopra menzionati sono irrisolubili colla riga e col compasso, la loro risoluzione deve essere cercata coll'uso di linee più elevate del cerchio, o di strumenti più elevati del compasso.

Per i due primi problemi (del 3.° grado) basta il tracciamento di coniche, e quindi uno strumento (com-

passo ellittico, iperbolico o parabolico) atto a tracciare queste linee.

L'ultimo invece richiede linee o strumenti più elevati, eppure si risolve oggi anch'esso, nel disegno, coll'uso dello strumento « *integrafo* » di ABDANK-ABAKANOWICZ

Lasciando da parte le precedenti considerazioni, andiamo ora a parlare del problema delle intersezioni di due coniche, cominciando dai casi in cui esso si riduce a problemi di 2.° grado, per venire poi a delimitare la classe dei problemi di 3.° grado.

§ 75. **Intersezioni di due coniche aventi due elementi comuni dati.** — Il problema generale di determinare gli elementi comuni a due coniche di un piano non è di 2.° grado e non si può ridurre alla risoluzione di successivi problemi di 2.° grado. ciò si può stabilire analiticamente, dimostrando che la sua risoluzione dipende da un'equazione irriducibile del 4.° grado.

Sono tuttavia problemi di 2.° grado, o si riducono a problemi di 2.° grado, e si risolvono quando si ha nel piano una conica fondamentale fissa, i problemi relativi a tali intersezioni. ove già sieno *dati* due elementi (punti o tangenti) comuni alle date coniche. Ci riferiamo alle coniche luogo, lasciando che si traducano per dualità questi sviluppi.

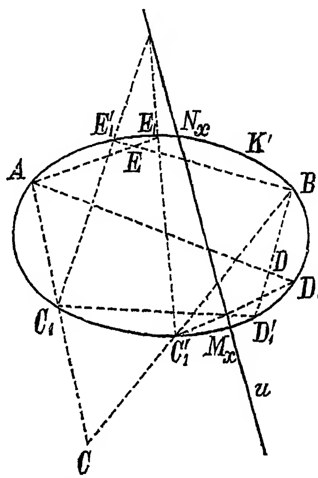
Anzitutto notiamo che (§ 63) due coniche non possono avere più di quattro punti comuni, altrimenti coinciderebbero. Se in un punto comune esse hanno altresì comune la tangente, deve ritenersi che ivi sieno riuniti almeno due punti (infinitamente vicini) comuni alle due coniche.

Dopo ciò si vogliono risolvere, in un dato piano (ove operiamo) i seguenti problemi:

1.° PROBLEMA. — *Determinare le* (eventuali) *ulteriori intersezioni di due coniche aventi due punti comuni dati.*

Sieno K, K' due coniche (d'un piano) aventi comuni due punti A, B. Si proiettino ad esempio da A, B i punti

di K su K'. Si ottiene su K' una proiettività di cui si può determinare l'asse di collineazione u; i suoi (eventuali) punti d'intersezione con K' sono anche comuni a K. La prima parte della costruzione si effettua linearmente ove le K, K' sieno individuate per 5 elementi (stante le costruzioni del § 63). Le intersezioni di K' (o K) colla retta u si determinano colla costruzione di 2.° grado indicata (§ 73), data nel piano una conica fissa. La costruzione diventa semplicissima se una delle coniche K, K' è completamente tracciata, e può quindi assumersi come conica fondamentale



Osservazione. — Le due coniche K, K' hanno oltre A, B.

a) due punti comuni M_x, N_x, se u riesce secante per una di esse (e quindi per ambedue), e non passa per A, B,

b) un punto comune di contatto (cioè colla stessa tangente), se u è tangente fuori di A, B a K, K';

c) nessun punto comune, se u è esterna a K, K'.

Le due coniche K, K' hanno un punto di contatto in A o in B, se u passa per A o B.

Se le due coniche K, K' hanno oltre ad A, B un altro punto comune dato M, l'ulteriore intersezione N_x si costruisce linearmente. Il punto N_x può cadere eventualmente in A, B, M, essendo allora uno di questi un punto di contatto.

Se le due coniche K, K' hanno comuni A, B e la tangente in uno di essi, per esempio in A, esse hanno in generale comune un altro punto, che si costruisce

linearmente. Eccezionalmente questo punto può cadere in B, che sarà allora punto di contatto, oppure in A che si direbbe un punto di *contatto tripunto*.

Questi vari casi offriranno utili costruzioni, da eseguirsi come esercizi.

2.° Problema. — *Determinare le* (eventuali) *ulteriori intersezioni di due coniche aventi un dato punto comune di contatto.*

Sieno K, K' due coniche aventi il punto comune A, ed in esso la stessa tangente a. Riferiamo prospettivavamente le due coniche come sezioni del fascio A; esse risultano allora omologiche (§ 71), e l'asse di omologia le sega negli (eventuali) ulteriori punti che esse hanno comuni.

Si può costruire il detto asse linearmente, allorchè le due coniche sieno definite per 5 elementi.

Infatti si costruiscano 3 coppie di punti corrispondenti BB', CC', DD' (sezioni di K, K' con 3 raggi per A). Le rette corrispondenti BC, $B'C'$; BD, $B'D'$, ecc s'incontrano sull'asse d'omologia.

Osservazione. — Se u non passa per A, le due coniche K, K' hanno fuori di A due punti comuni, o un punto di contatto, o nessun punto, secondochè u è secante, tangente o esterna (ad una e quindi) ad ambedue le coniche

Se u passa per A, ma non è la tangente a, le K, K' hanno in A un contatto tripunto, e vi è una ulteriore intersezione di K, K' fuori di A, la quale può essere determinata linearmente. Se u coincide con a, le K, K' non hanno ulteriori intersezioni e si dice che si *osculano* o hanno un contatto *quadripunto* in A.

Si può vedere come esista *una* conica K', passante per due punti dati fuori di una conica K, ed avente un contatto tripunto con K in un dato punto. Similmente esiste una conica K' osculatrice ad una data K in un punto, e passante per un altro punto fuori di K.

Si potrà assegnare in ambedue i casi (linearmente) quanti si vogliano punti di K'.

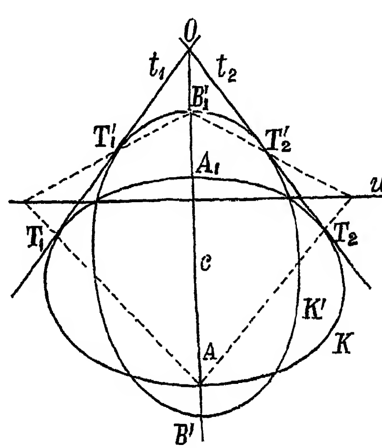
Emerge dalle precedenti considerazioni che, come si può dire che due coniche (semplicemente) tangenti in un punto hanno ivi riunite due intersezioni infinitamente vicine, così un contatto tripunto o quadripunto si possono riguardare come equivalenti a tre o rispettivamente a quattro intersezioni infinitamente vicine delle due coniche.

3.° Problema. — *Determinare le* (eventuali) *intersezioni di due coniche aventi due date tangenti comuni.*

Questo problema è di grado superiore al 2.°, perchè comporta fino a 4 soluzioni; tuttavia la sua risoluzione si può far dipendere da quella di due successivi problemi di 2.° grado.

Sieno K, K' due coniche. tangenti alle rette t_1, t_2 che s'incontrano in O. Sappiamo che uno degli angoli $t_1 t_2$ (contenente K) è tutto costituito di rette secanti K, l'altro di rette esterne. Se K, K' sono contenute in diversi angoli $t_1 t_2$, esse, salvo che abbiano comune uno o ambedue i punti di contatto con t_1, t_2, non hanno alcun punto comune.

Supponiamo dunque che K, K' sieno iscritte nello stesso angolo $t_1 t_2$; escludiamo inoltre che t_1, t_2 abbiano lo stesso punto di contatto colle due coniche, giacchè questo caso ci riconduce al problema precedente. Ogni retta per O segante una conica sega anche l'altra. Sia c una tal retta, ed $A A_1$, $B'B'_1$ le coppie segate su c da K, K'. Possiamo riferire proiettivamente le due



coniche K, K' facendo corrispondere i punti T_1, T_1' e T_2, T'_2,

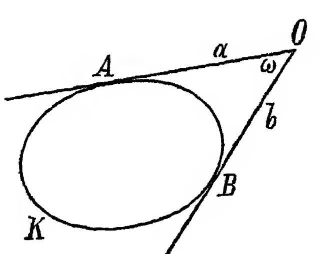
in cui esse sono toccate da t_1, t_2, e i punti A, B' oppure i punti A, B_1'. Tanto per l'uno quanto per l'altro riferimento le due coniche risultano omologiche (§ 71), e gli assi delle omologie, determinati dalle intersezioni delle rette corrispondenti, intersecano le dette coniche nei punti che esse hanno in comune.

§ 76. **Problemi di 3.° grado. - Determinazione degli elementi uniti di un' omografia piana. - Asse d' una congruenza nella stella.** — Diremo *problema fondamentale di 3.° grado* il problema di determinare le ulteriori intersezioni di due coniche d'un piano, aventi un *dato* punto comune non di contatto. Questo problema non è riducibile a problemi di 1.° grado e di 2.° grado. Esso non può essere risoluto colla riga e col compasso, ma coll'uso di istrumenti più elevati (come il compasso ellittico, ecc.) atti a tracciare le coniche. Sono problemi di 3.° grado tutti quelli che possono ridursi linearmente alla risoluzione del problema fondamentale sopra nominato.

I problemi di 3.° grado hanno *tre* soluzioni al più e *una* almeno; giacchè due coniche (d'un piano) aventi comune un punto, non di contatto, hanno comune al più altri tre punti e almeno uno, come ci proponiamo di dimostrare.

Premettiamo il seguente:

Lemma. — Sieno K una conica ed O un punto esterno; a, b le tangenti condotte da O a K; A, B i loro punti di contatto. Si indichi con ω l'angolo $a\,b$ costituito dalle rette per O secanti la conica (§ 69). Le intersezioni di una retta dell'angolo ω con K separano A, B su K, perchè si

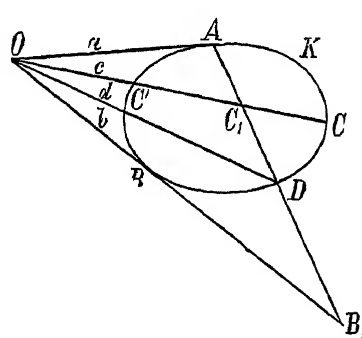


corrispondono in una involuzione di cui A, B sono punti doppi; vi è dunque *una* delle nominate intersezioni in ciascuno dei due archi AB della conica. Viceversa ogni punto di un arco AB, congiunto con O, dà una retta di ω. Ora vogliamo dimostrare che *tale corrispondenza biunivoca fra le rette dell'angolo* ω *e i punti d'un arco* AB *è ordinata*, cioè che mentre un punto si muove sulla conica descrivendo un arco AB, il raggio che lo unisce ad O si muove nel fascio descrivendo l'angolo ω.

Su K si prendano due punti qualunque C, D d'un arco AB, tali che per esempio D segua C nell'ordine (ACB) di K, e quindi $ACDB$ sieno susseguentisi; facciamo vedere (e così sarà stabilito il lemma) che si susseguiranno, nel fascio O, le rette:

$$a \equiv OA\,,\; c \equiv OC\,,\; d \equiv OD\,,\; b \equiv OB.$$

A tal fine si seghino le rette a, c, d, b, colla AD, rispettivamente nei punti A, C_1, D, B_1; basta dimostrare che sono susseguentisi i punti A, C_1, D, B_1, ossia che A, D separano C_1, B_1.

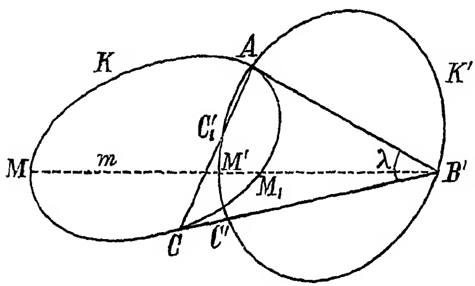


Ora ciò segue dal § 69. Invero il punto C_1 è interno alla conica K, giacchè i punti d'intersezione C, C' di c con K separano i punti A, D su K, perchè C' segue a B nell'ordine $(A\,C\,D\,B)$; invece B_1 è esterno a K appartenendo alla sua tangente b. Con ciò il lemma è stabilito.

Dopo ciò si può dimostrare il seguente

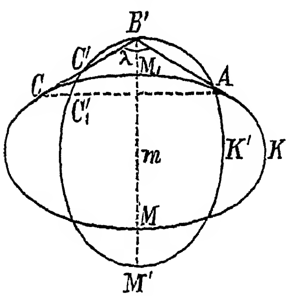
Teorema. — *Due coniche d'un piano aventi comune un punto non di contatto, hanno almeno un altro punto comune.*

Sieno K, K' due coniche d'un piano aventi comune il punto A, non di contatto. Si consideri la tangente in A



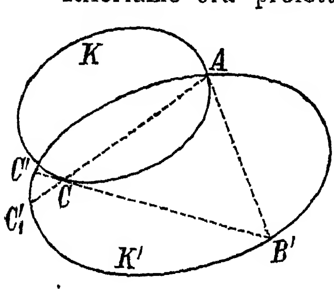
alla conica K, la quale incontrerà in un altro punto B' la conica K'. Per B', si conduca la seconda tangente (oltre la $B'A$) alla K; sia C il suo punto di contatto colla K e C' la sua ulteriore intersezione con K'.

Si indichi con λ l'angolo $B'(AC)$ del fascio B' costituito dalle secanti di K, cioè



l'angolo in cui è iscritta la K. Una retta m di λ incontra K in due punti M, M_1, e la K' in un punto M' oltre B'. Ora fra le rette m dell'angolo λ ed i punti analoghi ad M, M_1 su K, o ad M' su K', nasceranno delle corrispondenze ordinate, per le quali risulterà stabilito un riferimento ordinato dell'angolo λ rispettivamente ai due archi AC della conica K, e all'arco AC', che non contiene B', della K'; in conseguenza i tre archi nominati risulteranno pure riferiti ordinatamente fra loro.

Riferiamo ora proiettivamente le due coniche K, K' come sezioni del fascio A, e



sia C' la proiezione di C su K'; ai due archi AC di K vengono a corrispondere i due archi (complementari) $B'C'_1$ di K'. Ora i due archi $B'C'_1$ risultano riferiti in corrispondenza ordinata (prospettica) ai due archi

AC di K e quindi in corrispondenza ordinata all'arco AC' di K', che non contiene B.

Vi sono da distinguere due casi:

1.° B', C_1', non separano A, C'.

Allora si ha su K' una corrispondenza ordinata tra l'arco $B'AC_1'$, e l'arco interno AC' che non contiene B'. Mentre un punto si muove su K' descrivendo il 1.° arco, il corrispondente si muove descrivendo il 2.°; perciò (§ 19) vi è in AC' almeno un punto unito (diverso da A), evidentemente comune alle due coniche K, K'.

2.° B', C_1', separano A, C'

Allora se, su K', facciamo muovere un punto descrivendo l'arco AC' che non contiene B', i corrispondenti punti descriveranno gli archi complementari $B'C'$ in senso tra loro opposto; dunque uno di questi due archi verrà descritto in senso opposto al nominato arco AC'. In esso i due punti mobili corrispondenti (che si vengono incontro) s'incontreranno in un punto unito, come si può provare colle considerazioni del § 19; questo punto unito, diverso da A, risulterà evidentemente comune alle due coniche

In ogni caso dunque le coniche K, K' hanno (oltre A) almeno un altro punto comune, *c. d. d.*

Un ulteriore esame della questione permetterebbe (seguendo i medesimi principii) di discutere i vari casi possibili relativamente alle intersezioni di due coniche in un piano, avuto riguardo alla loro posizione relativa, cioè all'esistenza di punti dell'una esterni od interni all'altra, ecc Si perverrebbe così ad una serie di risultati perfettamente rispondenti alla nostra intuizione. Non ci addentreremo in tale esame un po' minuto, rimandando chi desidera acquistarne nozione alla Nota di Eugenio Maccaferri « Su di un teorema fondamentale relativo agli elementi comuni di due coniche in un piano ». (Rendic. Circolo Matematico di Palermo, 1895).

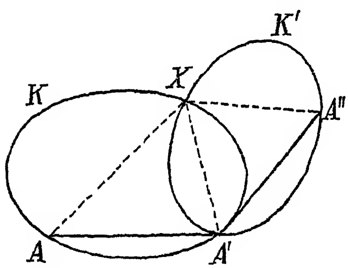
Passeremo invece alla risoluzione del seguente problema di 3.° grado:

Determinare i punti uniti di un' omografia piana non omologica.

Si prenda nel piano dell' omografia un punto A, non unito e non appartenente ad alcuna retta unita, ciò che può sempre farsi, perchè la data omografia non è una omologia. Sia A' il punto corrispondente ad A, ed A'' il punto corrispondente ad A'. I punti A, A', A'' non si trovano sopra una retta, giacchè questa dovrebbe essere unita.

Ora i fasci A, A', e così i fasci A', A'', risultano riferiti proiettivamente dall' omografia, e tale riferimento non è prospettivo, perchè le rette AA', $A'A''$ non sono unite.

I primi due fasci genereranno una conica K passante per A, A', e tangente in A' alla retta $A'A''$, i secondi fasci genereranno un' altra conica K' passante per A', A'', e tangente in A' alla AA'. Le due coniche, avendo in comune il punto A', dove non si toccano, si incontreranno ulteriormente in qualche punto, in un punto almeno, od in tre punti al più. Questi punti d' intersezione, ed essi soli, saranno i punti uniti dell' omografia.



Infatti, sia X un punto (diverso da A') comune alle due coniche; alle rette AX, $A'X$, corrispondono rispettivamente, nell' omografia, le $A'X$, $A''X$, e quindi ad X corrisponde X stesso.

Viceversa, se X è un punto unito dell' omografia, alle rette AX, $A'X$, corrispondono rispettivamente le $A'X$, $A''X$, e quindi X si trova sulle due coniche K, K'.

Correlativamente si possono costruire le rette unite dell' omografia, le quali si ottengono anche come rette associate ai punti uniti (§ 49).

Si deduce che:

In ogni omografia piana vi è almeno un punto unito, ed almeno una retta unita.

Ora, col principio di dualità nello spazio, dedurremo ancora:

In ogni omografia di una stella vi è almeno una retta unita, ed almeno un piano unito.

Corollario. * — In particolare, in una congruenza, data in una stella propria (§ 54), vi saranno almeno una retta unita a ed un piano unito ad essa ortogonale.

Ora si consideri la congruenza nel fascio di piani di asse a; questa potrà essere diretta o inversa (§ 32). Esaminiamo i due casi:

1) Se la congruenza nel fascio a e diretta, tutti i piani per a possono essere sovrapposti simultaneamente ai corrispondenti, eseguendo una rotazione attorno ad a; anzi questa rotazione può effettuarsi in due modi, descrivendo (in senso opposto) angoli supplementari. Ora una rotazione siffatta sovrapporrà tutti i raggi della stella ai corrispondenti, o li porterà ad occupare posizioni simmetriche rispetto ad a (generando nella stella una congruenza con un fascio a di piani uniti, la quale (§ 54) sara identica oppure sarà una simmetria rispetto ad a); anzi avverrà appunto che, eseguendo la rotazione in un senso opportuno, ogni raggio venga sovrapposto all'omologo, mentre dalla rotazione nell'altro senso esso sarà portato nella posizione simmetrica. Si vede dunque che la congruenza nella stella può venire generata da una rotazione attorno alla retta a; la quale evidentemente è unica retta unita, se si esclude il caso che tutti i piani per a sieno uniti, caso in cui si ha una simmetria rispetto ad a e sono uniti tutti i raggi della stella perpendicolari ad a.

2) Se la congruenza nel fascio di piani a è inversa, si hanno per a due piani uniti di simmetria, ed in ciascuno una retta unita (ortogonale ad a) sezione col piano unito

ortogonale ad a. Vi è dunque un triedro trirettangolo $a\,b\,c$, di elementi uniti. Ora, poniamo che nel fascio unito di piani avente come asse b, si abbia una congruenza diretta, poichè per b vi sono due piani uniti, potremo concludere che tutti i piani per b saranno uniti, e la congruenza della stella dovrà essere una simmetria rispetto a b. D'altra parte, se invece nel fascio b si ha una congruenza inversa, (simmetria rispetto ai piani ba, bc), è facile vedere che la congruenza della stella è una simmetria rispetto a c, infatti ad ogni raggio x deve corrispondere l' intersezione del piano simmetrico di $a\,x$ rispetto ad $a\,c$ col piano simmetrico di $b\,x$ rispetto a $b\,c$. In conclusione la congruenza della stella (nella nostra ipotesi 2.^{a}) è una simmetria rispetto ad un asse, generabile colla rotazione di due angoli retti attorno a quest' asse (§ 54).

Riassumendo abbiamo dunque.

Ogni congruenza in una stella propria può essere generata da una rotazione attorno ad un asse fisso.

Questo asse di rotazione è sempre determinato ed è l'unica retta unita della congruenza, ove questa non sia una simmetria

In particolare si deduce:

Data una congruenza nel piano improprio, esiste sempre una retta unita, sopra la quale resta subordinata una congruenza diretta, ed un punto unito, polo di questa retta rispetto alla polarità assoluta. La congruenza (supposta non identica) del piano improprio possiede soltanto un punto ed una retta uniti, oppure è un' omologia armonica (simmetria).

CAPITOLO XII

*Proprietà focali delle coniche.

§ 77. **Fuochi.** — Un punto del piano di una conica pel quale le rette coniugate sono perpendicolari, cioè tale che l'involuzione dei raggi coniugati per esso sia quella degli angoli retti, dicesi un *fuoco* della conica.

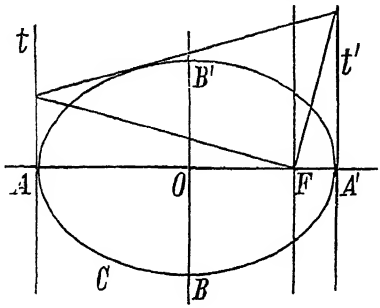
Occupiamoci anzitutto della ricerca dei fuochi per le coniche a centro.

Poichè l'involuzione (degli angoli retti) costituita dai raggi coniugati che passano per un fuoco è ellittica, i fuochi, se esistono, sono interni alla conica.

Se un fuoco cade nel centro della conica, questa è un circolo (§ 59) ed allora non vi sono altri fuochi. Escludiamo questo caso.

Sia F un fuoco d'una conica a centro C, diverso dal centro O di essa; si conduca il diametro OF. La retta per F coniugata ad OF è, per la definizione di fuoco, perpendicolare in F alla OF stessa; quindi il diametro OF è perpendicolare (ad una e in conseguenza) a tutte le corde coniugate, esso è dunque un asse della conica. Perciò ogni fuoco deve trovarsi sopra un asse della conica.

Ora, l'asse OF della conica C a cui appartiene un fuoco F (poichè F è interno) deve segare la conica in due punti A, A', (vertici), e quindi, se la conica stessa è un'iperbole, deve essere l'asse principale (§ 70).



Conduciamo rispettivamente in A, A' le tangenti t, t' alla conica, perpendicolari all'asse AA'.

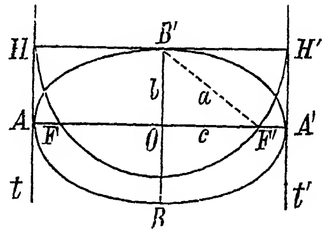
Proiettando da un punto della AA' i punti d'incontro di t, t' con un'altra tangente della C, si ottengono sempre due rette coniugate (§ 60, teorema a destra) giacchè AA' è la polare del punto all'infinito tt', in particolare la proprietà enunciata sussiste ancora se le nominate intersezioni di t, t' con una diversa tangente di C, vengono proiettate da F; e, poichè F è un fuoco, i raggi proiettanti debbono in tal caso essere ortogonali. Dunque da un fuoco posto sull'asse AA' di C, si vede sotto angolo retto il segmento (finito) intercetto sopra una qualunque tangente di C (diversa da t, t') dalle t, t'.

Viceversa, tale proprietà serve a caratterizzare il fuoco, giacchè un punto dell'asse AA' dal quale si veda sotto angolo retto il segmento finito intercetto sopra una tangente da t, t', è un punto pel quale passano due coppie di raggi coniugati ortogonali, onde l'involuzione dei raggi coniugati per esso è quella degli angoli retti.

Ciò posto, distinguiamo i due casi dell'ellisse e dell'iperbole:

a) La conica C sia un'ellisse; sieno AA', BB' le due coppie di vertici, sezioni di essa cogli assi. Suppongasi che il segmento AA' sia maggiore di BB', e si conduca in B' la tangente all'ellisse (perpendicolare a BB') ad incontrare t, t' rispettivamente in H, H'. Il cerchio di

diametro HH' incontra l'asse AA' in due punti F, F', da ciascuno dei quali si vede sotto angolo retto il segmento HH'. questi due punti (e non altri punti dell'asse AA') sono fuochi dell'ellisse C. Se si ripete la costruzione scambiando gli assi AA', BB', si stabilisce la non esistenza di fuochi sull'asse BB'. perchè il circolo analogo a quello con-



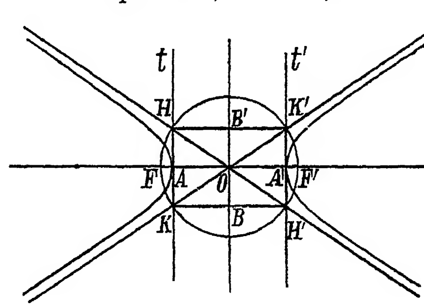
siderato innanzi, su cui essi dovrebbero trovarsi, non sega l'asse BB'. Infine se le lunghezze dei segmenti AA'. BB', sono uguali (caso del cerchio, § 70) si ottiene un solo fuoco comune ai due assi, ossia la ellisse ha *un* fuoco nel centro (cfr. § 59).

Resta dunque stabilito che, eccepito il caso del circolo, l'ellisse ha *due* fuochi appartenenti all'asse maggiore (o principale).

Inoltre il procedimento indicato fornisce la costruzione dei fuochi dell'ellisse.

Indicando con $2a$, $2b$ le lunghezze dei due assi, si ha che i fuochi dell'ellisse sono i punti dell'asse principale simmetrici rispetto al centro e distanti da esso di $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (vedi figura).

b) La conica C sia un'iperbole; sieno A, A' i suoi vertici, e t, t' le rispettive tangenti in essi. I due asintoti sono segati dalle tangenti t, t' in due coppie di punti HH', KK'; e queste sono le coppie di vertici opposti di un ret-



tangolo che ha per mediane gli assi. Ora un fuoco del-

l'iperbole, supposto esistente, è caratterizzato dal fatto di essere un punto dell'asse AA' da cui si vede sotto angolo retto il segmento HH' (o KK'); esistono dunque per l'iperbole C *due* fuochi sull'asse trasverso AA', e si costruiscono come sezioni dell'asse stesso col cerchio circoscritto al rettangolo $HKK'H'$, cerchio avente il centro nel centro O dell'iperbole.

Se $2a, 2b$ sono rispettivamente le lunghezze AA' dell'asse principale (trasverso), e dell'asse ideale (§ 70), i fuochi disteranno dunque dal centro della lunghezza $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Le lunghezze $2a$, $2b$ dei due assi essendo uguali per l'iperbole equilatera, in tal caso i due fuochi disteranno dal centro di $c = \sqrt{2} . a$.

Riassumendo, possiamo enunciare il

Teorema — *In una conica a centro avente le lunghezze degli assi* $2a$, $2b$, *esistono due fuochi posti sull'asse principale e distanti dal centro di* $\sqrt{a^2 \pm b^2}$, *dove il segno superiore vale per l'iperbole, ed il segno inferiore per l'ellisse. Quando* $a = b$ *l'ellisse si riduce ad un cerchio, ed i fuochi vengono a coincidere nel suo centro.*

Questo teorema racchiude la più semplice costruzione dei fuochi.

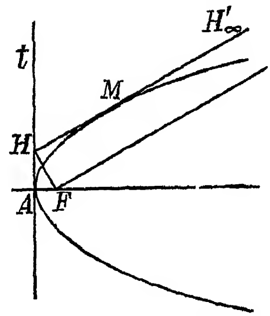
Il ragionamento che ha servito alla ricerca dei fuochi per le coniche a centro, ci ha anche mostrata la seguente proprietà caratteristica di essi, di cui abbiamo fatto uso:

Data una conica a centro, il segmento intercetto sopra una tangente qualunque di essa dalle tangenti nei vertici dell'asse principale, è veduto da un fuoco sotto angolo retto.

Rivolgiamoci ora a cercare se esistono fuochi nella parabola. Dimostreremo che ne esiste *uno*, e vedremo come esso possa determinarsi.

Come per le coniche a centro, si prova che se la parabola ha un fuoco F, questo appartiene all'asse ed è

interno alla parabola; inoltre da F deve vedersi sotto angolo retto il segmento HH'_∞ di una qualsiasi tangente, intercetto dalla tangente t nel vertice, e dalla retta all' infinito (tangente t' nel vertice all'infinito della conica).



Viceversa, una tale proprietà caratterizza il fuoco della parabola.

Ora, si consideri una qualunque tangente propria della parabola diversa da t; questa segherà la t in un punto proprio H. La perpendicolare ad HM in H incontrerà l'asse della parabola in un punto proprio F.

Il punto F così determinato è un fuoco, perchè da esso escono due coppie di raggi coniugati ortogonali: l'asse e la sua perpendicolare, la retta FH e la parallela ad HM. Viceversa, per ciò che è stato detto innanzi, non vi sono altri fuochi della parabola, oltre F

Si conclude il

Teorema: *La parabola ha* **un** *fuoco che è un punto interno dell' asse.*

Il fuoco della parabola si costruisce nel modo precedentemente indicato, che ha servito a determinarlo

Il raggio proiettante dal fuoco della parabola l'intersezione della tangente nel vertice con un' altra tangente (propria), *è sempre perpendicolare a questa* (ultima) *tangente.*

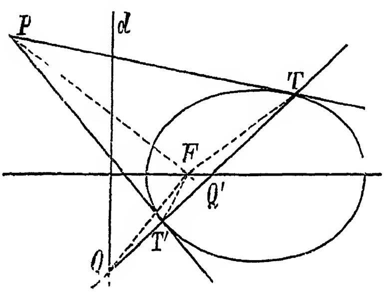
§ 78. **Direttrici. Proprietà focali angolari.** — Per lo studio delle proprietà (focali) inerenti ai fuochi delle coniche, giova considerare le polari dei fuochi, dette *direttrici* (ciascuna corrispondente ad un fuoco).

L'ellisse e l'iperbole posseggono due direttrici perpendicolari all'asse principale ed esterne alla conica; il cerchio ha come unica direttrice la retta all' infinito.

La parabola possiede una direttrice perpendicolare all' asse.

Il punto d'intersezione di ciascuna direttrice coll'asse principale, insieme al fuoco corrispondente, separa armonicamente la coppia dei vertici appartenenti all'asse.

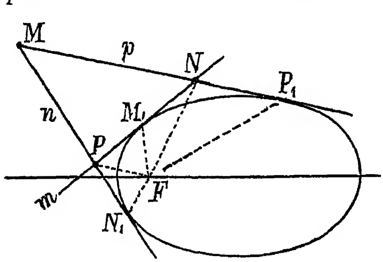
Sia P un punto qualunque del piano, esterno ad una data conica, e sieno T, T' i punti di contatto delle tangenti alla conica condotte da P. Sarà $T\,T'$ la polare di P, quindi il punto Q, intersezione della $T\,T'$ colla direttrice d polare del fuoco F, sarà il polo della retta PF. Ne segue che le rette FP, $F\,Q$ uscenti dal fuoco F saranno coniugate e quindi perpendicolari fra loro D'altra parte il punto Q' intersezione della retta $T\,T'$ colla PF (polare di Q) e il coniugato armonico di Q rispetto a $T.T'$. quindi il gruppo di raggi $F(TT'\,QQ')$ ottenuto proiettando da F il gruppo armonico $TT'\,QQ'$ sarà esso pure armonico: ma poichè i raggi FQ, FQ' ($\equiv FP$) sono ortogonali, gli altri due raggi FT, FT' saranno ugualmente inclinati sui nominati (§ 17)



Si deduce il

1.° Teorema. — *Le rette congiungenti un fuoco di una conica coi punti di contatto di due tangenti, sono ugualmente inclinate sulla retta che unisce il fuoco al punto d' intersezione delle due tangenti*

In particolare le tangenti ad una conica negli estremi di una corda passante per un fuoco, s'incontrano sulla perpendicolare alla corda nel fuoco.



Si consideri ora un triangolo circoscritto ad

una conica, formato da tre tangenti m, n, p di essa, ed avente come vertici (rispettivamente opposti ai detti lati) i punti M, N, P. Sieno M_1, N_1, P_1 rispettivamente i punti di contatto delle tangenti m, n, p colla conica. Se F è un fuoco della conica si ha pel teorema precedente:

$$NFP_1 = \frac{1}{2} M_1FP_1 \qquad N_1FP = \frac{1}{2} M_1FN_1.$$

onde
$$NFP = \frac{1}{2} N_1FP_1.$$

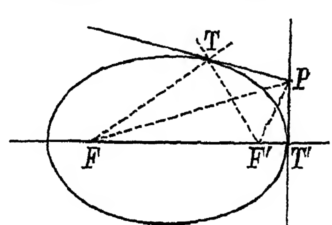
Di qui si deduce che, comunque si vari la tangente m della conica (diversa da n, p), restando fisse le n, p, l'angolo sotto cui è visto dal fuoco il segmento intercetto da n, p su m, resta costante.

Ossia, si ha il

2.° Teorema. — *Il segmento finito intercetto sopra una tangente variabile di una conica da due tangenti fisse, è visto da un fuoco sotto un angolo costante, che è la metà di uno degli angoli formati dai raggi proiettanti dal fuoco i punti di contatto delle due tangenti.*

Un caso particolare di questo teorema è quello dato nel paragrafo precedente, ove le due tangenti fisse sono le tangenti nei vertici dell'asse principale (una delle quali è la retta all'infinito se si tratta d'una parabola)

Ritorniamo al 1.° teorema, e supponiamo che uno, T', dei punti di contatto T, T', delle tangenti ivi considerate, sia un vertice della conica sull'asse principale. Conservando le notazioni ivi poste, sarà la retta PF una bisettrice dell'angolo TFT'. Se (supponendo la conica a centro e non un cerchio) si considera l'altro fuoco F', sarà ancora $F'P$ una bisettrice dell'angolo $TF'T'$.

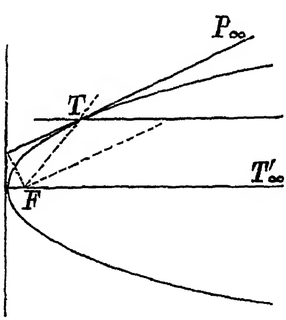


Ora siccome il punto P si trova sulle bisettrici degli angoli $TF'T'$ e TFT' esso dista ugualmente dalle tre rette TF, TF', FF'; segue che la retta PT biseca uno degli angoli FTF'. La retta TP essendo la tangente in T alla conica, si conclude il

3.° Teorema. — *Data una conica a centro, la tangente in un punto biseca uno degli angoli formati dai raggi proiettanti dai fuochi il detto punto* (si può dire che la cosa vale anche per il circolo ove ogni tangente è ortogonale al raggio che va al punto di contatto).

Osservazione. — La tangente in un punto alla conica biseca l'angolo esterno dei raggi proiettanti il punto dai fuochi, considerando come angolo interno di essi quello che sega sull'asse principale il segmento FF' interno alla conica, tale segmento interno è finito nel caso dell'ellisse, infinito per l'iperbole.

Se nel 1.° teorema applicato alla parabola si suppone che uno, T, dei punti di contatto delle tangenti ivi considerate, sia all'infinito, si deduce il seguente:



4.° Teorema. — *Data una parabola, la tangente in un punto biseca uno degli angoli formati dal raggio che unisce il fuoco al punto e dal diametro passante per il punto stesso.*

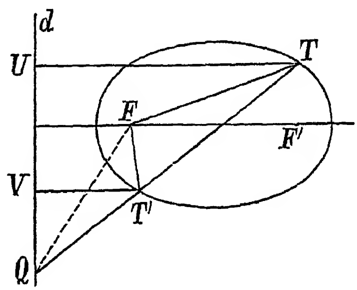
Osservazione. — La tangente in T alla parabola è bisettrice dell'angolo esterno formato dalle nominate rette, considerando come angolo interno di esse quello che sega sull'asse il segmento FT'_∞ interno alla parabola.

§ 79. **Proprietà focali segmentarie.** — Abbiamo fin qui esaminato le proprietà focali *angolari*, cioè quelle che esprimono relazioni d'angoli; esaminiamo ora le proprietà focali *segmentarie*.

Il segmento finito che unisce un punto proprio d'una conica ad un fuoco si suole designare col nome di *raggio focale* o *vettore del punto.*

Sopra una conica, prendiamo due punti ad arbitrio T, T' e congiungiamoli con un fuoco F. Risulta dalla dimostrazione del 2.° teorema (del paragrafo precedente) che la retta FQ congiungente il fuoco F col punto comune alla corrispondente direttrice d e alla retta TT' è una bisettrice dell'angolo TFT'; quindi (per una nota proprietà elementare)

$$FT : FT' = TQ : T'Q.$$



Ora consideriamo per T. T' rispettivamente le perpendicolari TU, TV alla retta d. Si avrà:

$$TQ : T'Q = TU : T'V,$$

e quindi

$$FT : FT' = TU : T'V$$

ossia

$$TF : TU = T'F : T'U.$$

Esprimendo in parole tale relazione si ha il

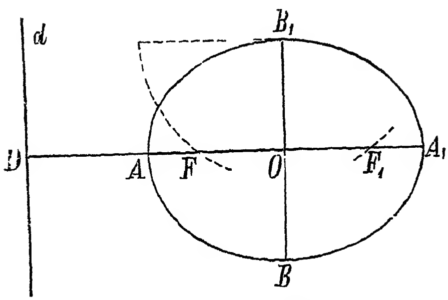
5.° Teorema. — *Le distanze d'un punto di una conica da un fuoco e dalla corrispondente direttrice sono in rapporto costante.*

Questo rapporto è quello secondo il quale un vertice della conica divide il segmento dell'asse compreso tra il fuoco e la corrispondente direttrice.

Nelle coniche a centro tale rapporto relativo ad un fuoco ed alla direttrice sua polare, uguaglia il rapporto relativo all'altro fuoco ed alla corrispondente direttrice, per la simmetria della conica rispetto all'asse non principale.

Il nominato rapporto si designa con e e si chiama *eccentricità della conica.*

Se si tratta di una conica a centro, ed a è la semilunghezza dell' asse principale, b la semilunghezza dell' altro asse, la distanza dei fuochi dal centro è (§ 77): $c = \sqrt{a^2 \mp b^2}$, dove il segno — vale per l'ellisse ed il segno + per l'iperbole.



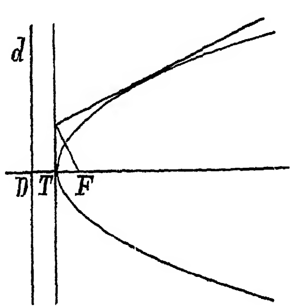
Allora dico che l'eccentricità è:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 \mp b^2}}{a}.$$

Per dimostrarlo riferiamoci, p. e., alla ellisse indicata nella figura. Allora si ha (considerando i segmenti in valore assoluto) $e = \frac{DA}{FA}$.

Ora $OA = a$, $OF = c$, $FA = OA - OF = a - c$; d' altra parte (poichè il gruppo $A A_1 F D$ è armonico) $OD = \frac{a^2}{c}$; onde $DA = OD - OA = \frac{a^2}{c} - a = \frac{a}{c}(a - c)$.

quindi $e = \frac{c}{a}$.



La cosa si dimostra nello stesso modo per l' iperbole trattandosi di segmenti presi in valore assoluto.

Nella parabola l' eccentricità è uguale ad 1, vale a dire che ogni punto della parabola è equidistante dal fuoco e dalla direttrice: ciò segue dal fatto che il vertice della parabola è il punto medio del segmento dell' asse compreso tra il fuoco e la direttrice (coniugato armonico del punto all' infinito dell' asse).

Si può dunque enunciare il

6° Teorema. — *L' eccentricità di una conica è:*

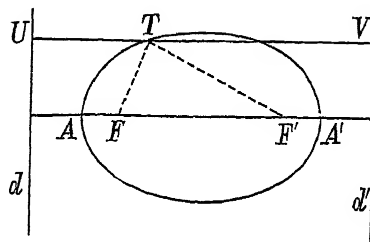
per l' ellisse $e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} < 1,$

per la parabola $e = 1,$

per l' iperbole $e = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a} > 1.$

Osservazione. — L'eccentricità di un cerchio è nulla.

Si consideri una conica a centro di eccentricità e, di cui F, F' sieno i fuochi, e T un punto qualunque. Sieno U, V i piedi delle perpendicolari condotte da T sulle direttrici d, d', polari di F, F'. Si avrà:



$$e = \frac{TF}{TU} = \frac{TF'}{TV},$$

quindi (per un noto teorema sulle proporzioni)

$$e = \frac{TF + TF'}{TU + TV} = \frac{TF - TF'}{TU - TV};$$

ora, (intendendo di prendere i valori assoluti dei segmenti indicati) si ha che nell'ellisse è costante la somma $TU + TV$, distanza delle due direttrici; invece nell'iperbole è costante la differenza $TU - TV$, che esprime in questo caso la distanza delle due direttrici.

Dunque si ha il

7.° Teorema. — *La somma dei raggi focali di un punto qualunque d' una ellisse è costante ed uguale alla lunghezza dell' asse principale* (somma dei raggi focali di un vertice).

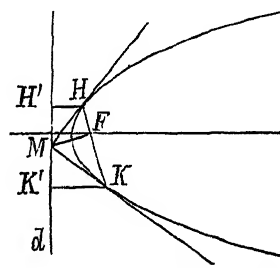
La differenza dei raggi focali di un punto qualunque di una iperbole è costante, ed uguale alla lunghezza dell' asse principale

Queste proprietà delle coniche a centro non hanno riscontro in una proprietà analoga della parabola.

Sussiste invece soltanto per la parabola il seguente:

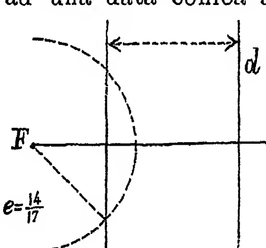
8° Teorema. — *Le tangenti alla parabola uscenti da un qualunque punto della direttrice sono perpendicolari fra loro.*

Sieno H, K i due punti di contatto delle tangenti condotte ad una parabola da un punto M della direttrice d. Tali punti sono estremi d' una corda passante pel fuoco F, perpendicolare alla retta FM. Sieno poi H', K' i piedi delle perpendicolari condotte rispettivamente da H, K su d. I triangoli rettangoli $HH'M$, HFM sono uguali perchè (pel 5° e 6.° teorema) $HH'=HF$, quindi l'angolo $HMF=HMH'$, e similmente $FMK=KMK'$; sicchè $HMF=\frac{\pi}{2}$. c. d. d



§ 80. **Costruzioni relative ai fuochi.** — I teoremi che abbiamo stabilito, concernenti i fuochi delle coniche, rendono più agevoli molte costruzioni relative ad esse. Ad esempio, si possono usare i teoremi 3.° e 4.° del § 78 per costruire la tangente in un punto ad una data conica a centro, di cui si conoscono i fuochi, o ad una parabola di cui si conosce il fuoco e la direzione dei diametri

Noto un fuoco F, la corrispondente direttrice d e l' eccentricità e di una conica, si può costruire per punti la conica, conducendo tante

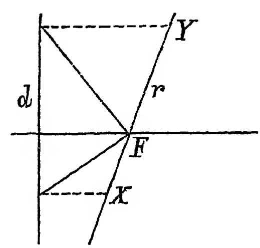


parallele alla d (in modo che riescano secanti) e segando ciascuna di esse col cerchio di centro F il cui raggio sta nel rapporto e alla distanza della retta da d (5 ° teor., § 79).

Dato un fuoco F e due tangenti a, b, coi relativi punti di contatto A, B, la conica può costruirsi per tangenti, congiungendo i punti di a, b il cui segmento è visto da F sotto l'angolo $\frac{1}{2} AFB$ (2.° teor., § 78), ecc.

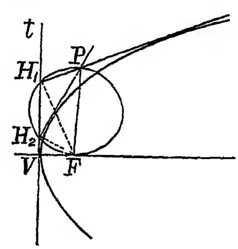
In particolare si possono notare le seguenti costruzioni relative alla parabola.

Dato il fuoco F e la direttrice d di una parabola, si possono determinare facilmente le intersezioni di essa con una retta r pel fuoco. Invero, si determinino le bisettrici degli angoli di r coll'asse, e per i punti d'intersezione di queste con d si conducano le perpendicolari a d; esse incontreranno r nei punti cercati (cfr. il 5.° e 6.° teorema del precedente §).



Si può costruire la parabola per tangenti, noto il fuoco F ed il vertice V, quindi la tangente t in V, normale all'asse VF.

Per i punti H di t si conducano le perpendicolari ai raggi FH: si avranno così tante tangenti della parabola (§ 77).



Se dunque si vogliono condurre le tangenti alla parabola per un punto esterno P, esse potranno costruirsi, determinandone le intersezioni con t, che sono i punti comuni a t ed al cerchio di diametro PF.

CAPITOLO XIII

* Le proprietà metriche dei coni quadrici.

§ 81. **Gli assi dei coni quadrici.** — Le proprietà grafiche dei coni quadrici si ottengono subito, per dualità o per proiezione, da quelle delle coniche, e si possono qui riguardare come note. Il cono quadrico è definito come fondamentale per una polarità non uniforme della stella. Esso può riguardarsi come *cono-luogo* di rette, o come *cono-inviluppo* di piani ed ammette corrispondentemente due generazioni con fasci proiettivi di piani o di raggi (non prospettivi), ecc.

Abbiamo già avvertito (§ 56) che il cono quadrico può riguardarsi come una *superficie* di punti, correlativamente alla concezione di una conica come insieme di piani tangenti.

Sotto questo aspetto si presentano alcune proprietà, di cui non abbiamo avuto occasione di notare le correlative, perchè nello studio delle coniche siamo rimasti nel piano.

Dato un cono ed un punto A, diverso dal suo vertice O, si dirà *piano polare del punto* A, il piano polare del raggio OA nella stella O.

I piani polari dei punti di una retta a non passante per O, formano un fascio il cui asse a' passa per O: a' dicesi la *retta polare di* a. Il piano Oa è il piano polare di a'. Quindi la a' contiene i poli di a rispetto alle coniche sezioni coi piani per essa.

Se a passa pel vertice O. la sua polare riesce indeterminata, perchè tutti i punti di a hanno lo stesso piano polare rispetto al cono; ogni retta di questo piano può riguardarsi come polare di a

Due *punti* dello spazio si dicono *coniugati rispetto al cono*, se il piano polare dell'uno passa per l'altro.

Due punti coniugati rispetto ad una conica, sezione piana del cono, sono anche coniugati rispetto al cono.

Sopra una retta a, non passante pel vertice del cono, si ha una *involuzione di punti coniugati rispetto al cono:* questa è anche l'involuzione di punti coniugati determinata sulla retta a da una conica qualsiasi, sezione del cono con un piano per a.

Dopo ciò passiamo a guardare i coni quadrici sotto l'aspetto metrico. e cominciamo perciò a distinguere i *coni* propriamente detti. col vertice proprio, dai *cilindri*, che hanno il vertice improprio.

Riferiamoci dapprima ai coni, escludendo per ora i cilindri dalle successive considerazioni.

Abbiamo notato che i poli d'una retta, non passante pel vertice d'un cono quadrico, rispetto alle coniche segate dai piani per la retta, sono sulla polare di questa; dunque si ha in particolare:

Una retta pel vertice d'un cono quadrico, contiene tutti i centri delle coniche, sezioni dei piani paralleli al piano polare della retta.

Una retta pel vertice d'un cono, che sia perpendicolare al proprio piano polare, dicesi un *asse* del cono.

Un asse di un cono quadrico contiene i centri di tutte le coniche sezioni coi piani perpendicolari ad esso

Quindi.

Gli assi di un cono quadrico sono assi di simmetria di esso; cioè insieme ad un punto del cono sta sul cono anche il suo simmetrico rispetto ad un asse.

Gli assi di un cono sono le rette pel vertice aventi lo stesso piano polare rispetto al cono e rispetto alla polarità ortogonale della stella (§ 54). Per comodità di ragionamento seghiamo la stella con un piano non passante pel vertice, e scegliamo come piano secante il piano all'infinito. la ricerca degli assi del cono si riduce così alla ricerca dei punti del piano improprio, che hanno la stessa polare rispetto alla conica K sezione del cono e alla polarità assoluta π, che è una particolare polarità uniforme (§ 54).

Indicata con T la polarità rispetto a K, i punti aventi la stessa polare in π, T, sono i punti uniti dell'omografia prodotto $T\pi$, ossia i punti uniti dell'omografia in cui si corrispondono i poli d'una retta rispetto a π, T.

Si debbono distinguere due casi:

1.° L'omografia $T\pi$ è una omologia. Allora il centro d'omologia P ha come polare in π, T, una retta, p, unita per l'omologia: e poichè p non appartiene a P, essendo π uniforme, la p sarà l'asse dell'omologia. Su questo asse le polarità π, T determinano la medesima involuzione di punti coniugati.

Ora, nel nostro caso, si avrà sull'asse p dell'omologia $T\pi$, una involuzione di punti coniugati rispetto al cono. che coinciderà colla involuzione assoluta di ogni piano per la retta impropria p. Dunque le sezioni del cono coi piani paralleli contenenti p (non passanti pel vertice), sono circoli (§ 59). I centri di questi circoli stanno sopra la polare di p, che passa per P e quindi è un asse del cono, ortogonale ai piani secanti. In conseguenza il cono si può considerare come un *cono di rotazione* attorno a questo asse (§ 56).

2.° L'omografia $T\pi$ non è un'omologia. Vi è sempre almeno un punto unito di essa, P, avente la stessa polare p rispetto a π, T. Su p le due involuzioni di punti coniugati rispetto a π, T, non coincidono; ma una almeno di queste involuzioni (quella rispetto a π) è ellittica, quindi (§ 37) esse hanno una coppia comune RS. I punti P,R,S sono i punti uniti dell'omografia $T\pi$, vertici d'*un* triangolo coniugato, comune alle due polarità π, T. Proiettando P,R,S, dal vertice del cono, si hanno dunque *tre* assi, due a due ortogonali. Si conclude.

Un cono quadrico ha **tre** *assi, due a due ortogonali, oppure è un cono di rotazione, ed in quest' ultimo caso possiede infiniti assi costituenti un fascio e la perpendicolare ad esso.*

Escluso il caso del cono di rotazione, consideriamo i tre assi a, b, c d'un cono quadrico. Poichè essi sono gli spigoli d'un triedro coniugato, uno di essi, p. e. a, sarà interno al cono, e gli altri due esterni (§ 57). il primo verrà denominato *asse principale*.

Le sezioni piane ortogonali all'asse principale a sono ellissi tutte simili fra loro (perchè appartengono a piani prospettivi paralleli), i loro assi sono paralleli ai due assi b, c del cono. Le sezioni piane ortogonali ad un asse non principale sono iperbole coll'asse trasverso parallelo all'asse principale del cono, ecc.

I tre piani ortogonali determinati dagli assi due a due sono *piani di simmetria* del cono quadrico, cioè insieme ad un punto appartiene al cono anche il suo simmetrico rispetto a ciascuno dei piani nominati.

Osservazione. — Guardando soltanto al contenuto grafico delle considerazioni precedenti, esse appariscono dirette a trattare un caso del problema seguente:

« Date, in un piano, due polarità, determinare i punti del piano che hanno la stessa polare rispetto ad esse ».

Questo problema (ove non riesca indeterminato) è del 3.° grado. Si possono discutere, per esercizio, i vari casi cui esso dà luogo, supponendo ambedue le polarità uniformi o ambedue dotate di conica fondamentale; quest' ultima ipotesi conduce ad un' analisi più minuta.

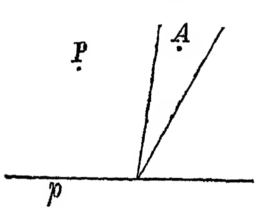
§ 82. **Sezioni circolari e rette focali del cono quadrico.** — Cerchiamo in generale se fra le sezioni piane (proprie) d' un cono quadrico vi sieno dei circoli.

Anzitutto si vede che, se un piano sega un cono secondo un circolo, lo stesso avviene di ogni piano parallelo, giacchè la proprietà caratteristica perchè un piano seghi un cono secondo un circolo, è che l' involuzione di punti coniugati sulla retta all'infinito del piano sia l'involuzione assoluta (in cui si corrispondono le direzioni ortogonali appartenenti alla giacitura). Si tratta dunque di trovare le rette all' infinito, sopra le quali si ha come involuzione di punti coniugati rispetto al cono, l' involuzione assoluta.

In altre parole si tratta di trovare, nel piano all'infinito, le rette sopra le quali la conica K sezione del cono, e la polarità assoluta π, subordinano la medesima involuzione di punti coniugati

Indichiamo ancora con T la polarità rispetto alla conica K (nel piano all' infinito).

Se l' omografia prodotto $T\pi$ è un' omologia (cioè se il cono è di rotazione), l' asse p dell' omologia è appunto, come si è notato, una retta sostegno della stessa involuzione di punti coniugati in π e in T. Dico che, in tal caso, non vi sono altre rette dotate di questa proprietà. Infatti, si consideri un punto qualunque A del piano, fuori di P, p; esso ha due polari distinte rispetto a π, T, le quali s'incontrano in *un* punto coniugato di A; ma queste due polari si corrispondono nell'omologia $T\pi$

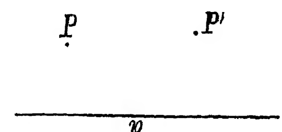


e però s'incontrano su p. Ora, data una retta a, i punti (diversi dal punto P e dal punto pa) che sono coniugati ai punti di essa contemporaneamente rispetto a π, T, sono su p, e quindi non possono stare su a, se non è $a \equiv p$.

Si escluda il caso in cui la $T\pi$ sia un' omologia. Essa ha allora (come sappiamo) *tre* punti uniti A, B, C, che sono i punti all' infinito degli assi del cono.

I lati del triangolo ABC non sono sostegno d' una stessa involuzione in π, T.

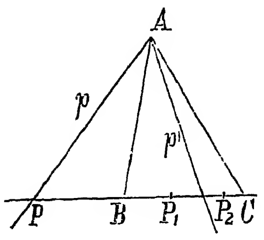
Ogni punto diverso da A, B, C ha due polari distinte rispetto a π, T, e perciò vi è *un* punto coniugato ad esso in ambedue le polarità. Si consideri una qualsiasi retta p diversa dai lati del triangolo ABC. Essa ha due poli P, P', distinti, nelle due polarità. Ogni punto di p (diverso da A, B, C) ammette come punto coniugato in π, T, l'intersezione delle due polari; queste polari, variando il punto su p, descrivono due fasci proiettivi coi centri P, P'.



I detti fasci sono prospettivi, se la retta PP' ha lo stesso polo rispetto a π, T. questo polo è allora su p, ed è uno dei punti A, B, C. Escluso tale caso, i detti fasci non sono prospettivi, quindi generano una conica, che è il luogo dei punti coniugati dei punti di p, tanto in π che in T.

Dunque, data una retta p, diversa dai lati del triangolo ABC, i punti coniugati dei punti di p, tanto in π che in T, costituiscono una conica o una coppia di rette, che diremo *luogo corrispondente* a p. Avviene il 1° di questi casi o il 2°, secondochè p non passa per A, B, C, o all' opposto passa per uno di questi tre punti. Se p deve essere sostegno della stessa involuzione di punti coniugati in π, T, essa deve far parte del luogo corrispondente, e perciò deve passare per uno dei punti A, B, C.

Si consideri ora una qualsiasi retta p pel punto A, diversa dalle AB, AC, e sia P il punto in cui essa incontra la BC. Il punto P ha rispettivamente in π, T, due punti coniugati P_1, P_2, che sono i poli di p rispetto a π. T

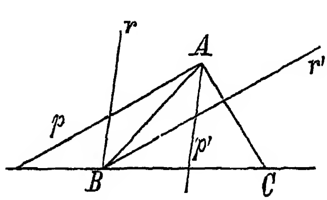


Il luogo corrispondente a p è allora costituito dalla retta $BC \equiv P_1 P_2$, polare dal punto A, e dall'asse di prospettività p' dei due fasci $P_1 . P_2$, descritti dalle polari (rispettivamente in π, T) dei punti di p (diversi da A) La retta p' passa per A, giacchè P, A, sono due punti coniugati tanto in π che in T.

Variando p per A, varia p' passando sempre per A; alla retta AB viene a corrispondere la AC (polare di B), e viceversa.

Ora consideriamo la corrispondenza (non identica) così ottenuta tra le rette p, p', nel fascio A, e dimostriamo che essa è proiettiva. Siccome il legame che definisce la relazione tra p. p', è reciproco, così resterà dimostrato che le coppie pp', si corrispondono in una involuzione del fascio.

Per fare la dimostrazione accennata, prendiamo una retta r per B, diversa da BA, BC, e costruiamo la retta r', luogo dei punti che sono coniugati dei punti di r, così nella polarità π come nella T. Due rette p, p',



corrispondenti nel fascio A, segano rispettivamente le r, r', in punti coniugati; ma siccome la corrispondenza tra le coppie di punti coniugati su r, r' è una proiettività (§ 60), anche la corrispondenza intercedente fra le coppie di rette p, p', pel punto A, sarà una proiettività, e quindi una involuzione, *c. d. d.*

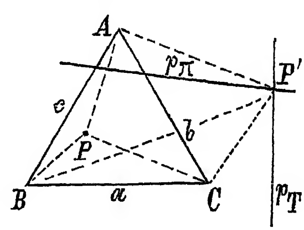
Relativamente ai fasci B e C, si possono istituire analoghe considerazioni. Si avranno così, nei fasci A, B, C, tre involuzioni I_A, I_B, I_C.

I lati del triangolo ABC, per ciascun vertice, costituiscono una coppia della involuzione. L' involuzione stessa sarà quindi ellittica o iperbolica, secondochè due rette coniugate in essa separeranno o no i lati del triangolo ABC, passanti pel loro punto comune.

In base a tale osservazione vediamo cosa possa dirsi intorno al senso di queste involuzioni.

Riferiamoci per ciò a quelle considerazioni sui triangoli. che abbiamo introdotte nel § 53.

Sia P un punto del piano, fuori dei lati del triangolo ABC, appartenente quindi ad una delle quattro regioni triangolari del piano definite dal triangolo ABC. e si designi con P' il punto coniugato ad esso rispetto π. T (intersezione delle due polari di P).



Il punto P' cadrà fuori della regione triangolare $P.ABC$, poichè la polare di P rispetto a π è certo esterna ad essa regione, essendo la π una polarità uniforme.

Ora i punti P, P', vengono proiettati dai punti A, B, C, secondo coppie di rette, coniugate rispettivamente nelle involuzioni I_A, I_B, I_C. Ma, di queste coppie, due separeranno i lati del triangolo ABC passanti pel loro punto comune, ed una no, in conseguenza, delle tre involuzioni I_A, I_B, I_C, una sarà iperbolica e due saranno ellittiche. Si deduce che esistono due rette del piano, passanti per uno dei vertici del triangolo ABC, (e precisamente per uno dei due vertici esterni a K — § 69) che sono sostegno della stessa involuzione (ellittica) di punti coniugati nelle polarità π, T.

Ricordando il significato delle polarità π, T, che sono rispettivamente la polarità assoluta, e la polarità rispetto alla conica, sezione del cono col piano all'infinito, si deduce:

Un cono quadrico, che non sia un cono di rotazione, ammette due fasci impropri di piani di sezione circolare; e può quindi riguardarsi sempre come un cono circolare obliquo (§ 56)

Un cono di rotazione ammette come sezioni piane circolari soltanto quelle fatte coi piani ortogonali all'asse di rotazione

In un cono quadrico, che non sia di rotazione, i piani di sezione circolare sono paralleli a due piani (ciclici) passanti per un asse non principale.

Ciascun piano ciclico gode della proprietà caratteristica di contenere come involuzione di rette coniugate l'involuzione degli angoli retti. I piani ciclici d'un cono quadrico presentano dunque una analogia coi fuochi delle coniche.

Ma, ai fuochi delle coniche fanno anche riscontro, per un cono quadrico, due rette pel vertice che diconsi *rette focali*. Una retta focale può definirsi come l'asse di un fascio di piani nel quale l'involuzione dei piani coniugati e quella degli angoli retti. Da questa definizione segue subito che:

Segando un cono quadrico coi piani (non passanti pel vertice) ortogonali ad una retta focale, si ottengono coniche che hanno un fuoco sulla nominata retta focale.

La determinazione delle rette focali di un cono quadrico costituisce un problema correlativo alla determinazione dei piani ciclici. Infatti le rette focali corrispondono ai punti del piano all'infinito, che sono centri di fasci, nei quali l'involuzione delle rette coniugate rispetto alla conica C, sezione del cono, è anche l'involuzione delle rette coniugate rispetto alla polarità assoluta π.

Possiamo dunque concludere che:

Un cono quadrico, non di rotazione, possiede due rette focali poste in uno dei piani di simmetria per l'asse principale.

Un cono di rotazione possiede una sola retta focale, che è l'asse di rotazione.

Osservazione. — Guardando il loro contenuto grafico, le considerazioni che ci hanno condotto alla determinazione delle sezioni circolari di un cono quadrico, o correlativamente a quella delle rette focali, appariscono relative al problema generale seguente:

« Date, in un piano, due polarità, determinare le rette, su cui viene subordinata la stessa involuzione di punti coniugati, o i fasci di raggi, in cui si ha la stessa involuzione di rette coniugate ».

Questo problema viene risoluto nel caso in cui una delle due polarità è uniforme e l'altra è dotata di conica fondamentale. Sono interessanti gli altri due casi (di cui si può fare la discussione per esercizio); soprattutto il caso in cui si abbiano due coniche fondamentali, che conduce alla questione generale relativa alle *intersezioni* e alle *tangenti comuni di due coniche.*

§ 83 **Asse e rette focali del cilindro quadrico.** — I coni quadrici col vertice all'infinito sono stati denominati *cilindri* (quadrici). Un cilindro è dunque il luogo delle rette parallele ad una data, condotte pei punti d'una conica.

Ogni piano non parallelo alle generatrici d'un cilindro lo sega secondo una conica. Questa è una ellisse, una iperbole o una parabola, secondochè il piano all'infinito è esterno, secante o tangente rispetto al cilindro; corrispondentemente il cilindro dicesi: *ellittico*, *iperbolico*, *parabolico*.

Nella stella impropria col centro nel vertice (all'infinito) del cilindro, vi è una polarità rispetto a cui il cilin-

dro è fondamentale. Il piano all'infinito ha come polare una retta che dicesi *asse del cilindro*. Questo asse è una retta propria pel cilindro ellittico ed iperbolico, impropria pel cilindro parabolico.

La conica sezione d'un cilindro, non parabolico, con un qualunque piano, che non sia parallelo alle generatrici, ha il centro sull'asse.

Tutte le sezioni piane di un cilindro parabolico sono parabole, il cui punto all'infinito è sulla generatrice all'infinito (asse) del cilindro.

Infatti, la retta all'infinito del piano secante è la polare del punto d'intersezione del piano stesso coll'asse, rispetto alla conica sezione.

Consideriamo i cilindri aventi asse proprio, cioè escludiamo, per il momento, i cilindri parabolici

Vi è una involuzione di piani coniugati per l'asse a del cilindro, la quale possiede una coppia (almeno) di piani coniugati ortogonali α, β Segando il cilindro con un piano ortogonale ad uno dei due piani α, β, si ottiene una conica che ha come (diametri coniugati ortogonali ossia come) assi le intersezioni del piano con α, β. In conseguenza i due piani α, β sono *piani di simmetria* pel cilindro, cioè se un punto è sul cilindro, vi è anche il simmetrico del punto rispetto ad α, β. Se tutti i piani per a sono ortogonali ai coniugati, le sezioni piane del cilindro ortogonali all'asse sono circoli, ed il cilindro può quindi ritenersi generato dalla rotazione d'una sua generatrice attorno all'asse; allora esso dicesi *cilindro di rotazione* o *cilindro circolare retto*

Concludiamo.

Un cilindro, non parabolico e non di rotazione, ammette due piani di simmetria ortogonali per l'asse, i quali contengono gli assi di tutte le coniche sezioni del cilindro coi piani perpendicolari. Il cilindro di rotazione ha tutti i piani per l'asse come piani di simmetria ed è caratterizzato da questa proprietà.

È poi facile vedere che:

Un cilindro parabolico ammette un piano di simmetria parallelo alle generatrici, contenente tutti gli assi delle parabole segate da piani ad esso ortogonali.

Osservazione. — Il cilindro ammette inoltre come piani di simmetria quelli ortogonali alle generatrici

Si osservi ancora che il cilindro ammette pure come assi di simmetria le rette che incontrano ortogonalmente l'asse e giacciono in uno dei due piani di simmetria pel medesimo. Tali rette costituiscono, in generale, due fasci impropri.

La determinazione delle *rette focali* del cilindro (le quali si definiscono come per il cono) è molto agevole.

Il cilindro, non parabolico e non di rotazione, ammette due rette focali parellele agli assi, che sono il luogo dei fuochi delle coniche, sezioni ortogonali del cilindro. Il cilindro di rotazione ammette un' unica retta focale che è l' asse.

Il cilindro parabolico possiede pure una sola retta focale, luogo dei fuochi delle parabole sezioni ortogonali.

Pel cilindro il problema delle rette focali non ha più, come pel cono, lo stesso rapporto colla determinazione delle sezioni circolari.

§ 84. **Sezioni circolari del cilindro.** — È evidentemente impossibile segare con un piano un cilindro iperbolico o parabolico secondo un circolo. Occupiamoci di esaminare se possono invece ottenersi sezioni piane circolari del cilindro ellittico.

Anzitutto nel cilindro di rotazione, ed in esso soltanto, sono sezioni circolari quelle coi piani ortogonali all' asse. Non vi sono in esso altre sezioni piane circolari. Infatti, basta osservare che sopra ogni piano obliquo all' asse del cilindro vi sono due punti del cilindro stesso, posti sopra una perpendicolare all' asse, la cui distanza dall' interse-

zione coll'asse (centro della conica sezione) è minore di quella di ogni altro punto della conica sezione.

Consideriamo il cilindro ellittico, non di rotazione

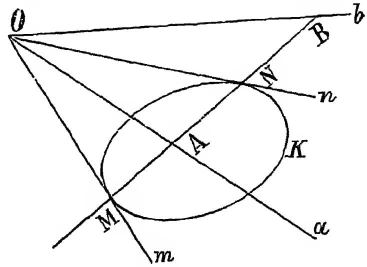
Il problema di segarlo secondo un circolo, consiste nel segare con un piano secondo l'involuzione degli angoli retti, l'involuzione dei piani coniugati per l'asse.

In primo luogo, dunque, il piano secante dovrà segare secondo un angolo retto il diedro retto dei piani di simmetria α, β, passanti per l'asse. Perchè ciò avvenga il piano stesso deve contenere la direzione ortogonale ad uno dei due piani α, β: infatti la sua retta all'infinito deve segare secondo due punti coniugati nella polarità assoluta le rette all'infinito a, b dei piani α, β, quindi (poichè a, b sono pure coniugate nella polarità assoluta) deve contenere uno dei due poli A, B delle rette $a. b$.

Si consideri il diedro di altri due piani coniugati per l'asse del cilindro. Un piano passante per uno dei punti all'infinito A, B, e secante (anche) questo diedro secondo un angolo retto, sega l'involuzione dei piani coniugati per l'asse, secondo l'involuzione degli angoli retti, vale a dire è un piano di sezione circolare del cilindro. e lo stesso accade per ogni piano parallelo ad esso. Ora, si indichino con m, n. le rette all'infinito dei piani coniugati, costituenti il nominato diedro; allora i piani di sezione circolare sono quelli la cui retta all'infinito passa per uno dei due punti A, B, e sega le rette m, n in punti coniugati rispetto alla polarità assoluta.

Ma le rette m, n non sono coniugate nella polarità assoluta (essendo escluso il caso del cilindro di rotazione); per conseguenza se si fa corrispondere a ciascun punto di m il coniugato su n, le m, n risultano riferite proiettivamente (§ 60), e la proiettività tra m, n non è una prospet tività, perchè il punto comune ad esse non è coniugato di sè stesso (essendo la polarità uniforme). Dunque le rette che segano m, n in punti coniugati rispetto alla

polarità assoluta, inviluppano una conica K di cui le m, n sono tangenti. Indichiamo con O il vertice del cilindro che è comune alle rette m, n; i punti di contatto M, N, di m, n con K, sono i coniugati di O (rispettivamente su di esse) nella polarità assoluta, quindi stanno sulla retta AB polare di O. E poichè le coppie di rette mn, ab si separano, essendo ellittica l'involuzione dei piani coniugati per l'asse del cilindro (§ 37), anche le coppie di punti AB, MN dovranno pure separarsi. Segue che dei due punti A, B, l'uno è esterno, l'altro interno alla conica K (§ 69). Per quello esterno passano due tangenti a K, che sono le cercate rette all'infinito dei piani di sezione circolare del cilindro.



Si conclude.

Il cilindro ellittico, non di rotazione, ammette due fasci impropri di sezioni piane circolari, contenenti ambedue la direzione perpendicolare ad uno dei due piani di simmetria per l' asse.

In altre parole il cilindro (quadrico) ellittico può ritenersi in due modi come un *cilindro circolare obliquo.*

Il cilindro di rotazione ammette come piani di sezione circolare soltanto i piani ortogonali all' asse.

Osservazione. — Vogliansi le due sezioni piane circolari del cilindro ellittico, passanti per un dato punto dell'asse.

Si consideri l' ellisse sezione del cilindro, con un piano ortogonale all' asse, ellisse che ha il suo centro sull'asse. I detti piani di sezione circolare del cilindro passano per uno degli assi della nominata ellisse. Si osserverà che questo asse è precisamente l' asse maggiore dell' ellisse stessa.

CAPITOLO XIV

Proiettività tra forme di 3.[a] specie.

§ 85. **Definizioni.** — Allorchè si concepisce lo spazio due volte, per esempio in momenti differenti, si parla di *due spazi*

Due spazi si dicono *omografici* allorchè sono riferiti in modo che ad ogni elemento, punto o piano, dell' uno, corrisponda un elemento, rispettivamente punto o piano, nell' altro, in guisa che ad un punto e ad un piano di uno spazio che si appartengono, corrispondano sempre, nell'altro spazio, un punto e un piano che si appartengono. Si dice *omografia* la corrispondenza fra i due spazi. Un esempio * si ha supponendo di effettuare un *movimento* dello spazio riguardato come rigido, i punti e i piani dei due spazi, corrispondenti alla posizione finale e alla posizione iniziale del movimento, risultano riferiti omograficamente.

Una omografia tra due spazi si può riguardare anche come una corrispondenza biunivoca soltanto fra i punti di due spazi punteggiati, o soltanto fra i piani di due spazi di piani.

Sussiste allora la proprietà fondamentale che « mentre un punto si muove in un piano di uno dei due spazi,

il corrispondente si muove nell'altro spazio, giacendo sempre in un piano (omologo al primo) ». Questa proprietà si deve considerare come la proprietà caratteristica, che distingue l'omografia dalle altre corrispondenze biunivoche (non omografiche) che si potrebbero pensare fra due spazi: corrispondenze nelle quali ai punti d'un piano corrisponderebbero i punti d'una superficie non piana.

È ovvio fare l'osservazione correlativa.

Due spazi si dicono *reciproci* o *correlativi*, allorchè sono riferiti in modo che ad un elemento, punto o piano, dell'uno, corrisponda un elemento, rispettivamente piano o punto, nell'altro, in guisa che a due elementi (punto e piano) di uno spazio, che si appartengono, corrispondano sempre, nell'altro, due elementi (piano e punto) che si appartengono La corrispondenza intercedente fra due spazi reciproci dicesi *reciprocità* o *correlazione*.

La reciprocità si può anche riguardare come una corrispondenza biunivoca tra i punti di uno spazio punteggiato e i piani d'uno spazio di piani, dove ai punti di un piano (del primo spazio) corrispondono sempre i piani per un punto (del secondo).

Si abbracciano l'omografia e la reciprocità tra due spazi, sotto il nome comprensivo di *proiettività* tra due forme di 3.ª specie.

Si può dire che:

Due forme di 3.ª specie sono proiettive, allorchè sono riferite in modo che agli elementi di una forma di 2.ª specie nell'una corrispondano sempre gli elementi di una forma di 2.ª specie nell'altra.

Due forme di 3.ª specie proiettive ad una terza sono proiettive fra loro.

Due forme di 3.ª specie ambedue omografiche o ambedue reciproche ad una terza, sono omografiche.

Due forme di 3.ª specie, di cui l'una è omografica e l'altra è reciproca ad una terza, sono reciproche.

Queste proposizioni si possono raccogliere nell'enunciato (cfr. §§ 16, 21):

Il prodotto di due proiettività tra forme di 3.ª specie è una proiettività; e precisamente un' omografia o una reciprocità secondochè le proiettività componenti sono della stessa natura o di natura diversa.

Osservazione — Si confronti questo § col § 43.

§ 86. **Teorema fondamentale.** — Sieno Σ, Σ' due spazi omografici. Sia a una retta dello spazio Σ. Conduciamo per a due piani α, β: e sieno α', β', i loro omologhi in Σ'. Ai punti della retta a corrispondono in Σ' punti appartenenti ad α' e a β', cioè punti della retta $a' \equiv \alpha' \beta'$.

Si ha dunque che:

Nell' omografia tra due spazi, ai punti di una retta in uno spazio corrispondono sempre punti d' una retta (omologa) nell' altro.

E correlativamente: *Nell'omografia tra due spazi, ai piani dell' uno passanti per una retta, corrispondono sempre i piani per una retta (omologa) nell' altro.*

Viceversa si ha:

Se tra i punti di due spazi intercede una corrispondenza biunivoca, in cui ai punti d' una retta dell' uno corrispondono sempre, nell'altro, i punti d'una retta, la corrispondenza è una omografia.

Se tra i piani di due spazi intercede una corrispondenza biunivoca, in cui ai piani d' una retta dell' uno corrispondono sempre, nell' altro, piani per una retta, la corrispondenza è una omografia.

Dimostriamo l' enunciato di sinistra.

Per dimostrarlo bisogna far vedere che ai punti di un piano α appartenente ad uno dei due spazi, corrispondono sempre i punti di un piano nell' altro (confronta il § precedente).

Si indichino con Σ, Σ' i due spazi. Sia α un piano, p. es. di Σ, e si scelgano in esso una retta a ed un punto A fuori di a. Ad a, A corrispondono in Σ' rispettivamente una retta a' ed un punto A' che non si appartengono (se A' fosse su a', anche il suo omologo A in Σ sarebbe su a). Ora ai punti di una retta b, giacente nel piano α e passante per A, corrispondono i punti di una retta b' per A' in Σ'; e siccome b incontra a, b' incontrerà a' (nel punto omologo di ab). Segue che b' giacerà nel piano $\alpha' \equiv A'a'$, proiettante a' da A', e siccome b è una qualsiasi retta per A in α, segue che a tutti i punti del piano α corrispondono punti del piano α' in Σ', *c.d d.*

Ripetendo i ragionamenti precedenti collo scambiare in uno (solo) dei due spazi Σ. Σ', i punti ed i piani, si ottiene:

Data una reciprocità tra due spazi, ai punti d' una retta dell' uno corrispondono nell' altro i piani passanti per una retta (omologa).

Se tra i punti e i piani di due spazi intercede una corrispondenza biunivoca, in cui ai punti d' una retta dell' uno corrispondono sempre, nell' altro, i piani per una retta, la corrispondenza è una reciprocità.

Ossia, riassumendo:

La proiettività tra due forme di 3.ª specie è una corrispondenza biunivoca, che gode della proprietà caratteristica di far corrispondere agli elementi di una forma di 1.ª specie dell' una, gli elementi di una forma di 1.ª specie (omologa) dell' altra.

Tornando alla considerazione di due spazi omografici Σ, Σ', facciamo ora la seguente osservazione: Se α, α' sono due piani corrispondenti rispettivamente in Σ, Σ'; tra i punti di essi intercede una corrispondenza biunivoca, in cui ai punti d' una retta corrispondono i punti d' una retta, vale a dire un' omografia.

Due rette omologhe a, a', rispettivamente in Σ, Σ', possono considerarsi come appartenenti a due piani corrispondenti omografici; dunque (§ 44) esse sono proiettive.

Si ha così l'enunciato (cui uniamo a destra il correlativo):

Nell' omografia tra due spazi

due piani omologhi sono omografici: due punteggiate omologhe sono proiettive.	*due stelle omologhe sono omografiche; due fasci di piani omologhi sono proiettivi*

Inoltre *sono proiettivi due fasci di raggi omologhi*, i quali si possono considerare come fasci omologhi di due piani omografici.

Scambiando per uno dei due spazi i punti coi piani, si ha analogamente:

Nella reciprocità tra due spazi, un piano e una stella omologhi sono reciproci. una punteggiata e un fascio di piani, o due fasci di raggi omologhi sono proiettivi.

Ossia, riassumendo:

Se due forme di 3.ª specie sono proiettive. due forme di 2.ª o di 1.ª specie, che si corrispondono in esse, sono proiettive.

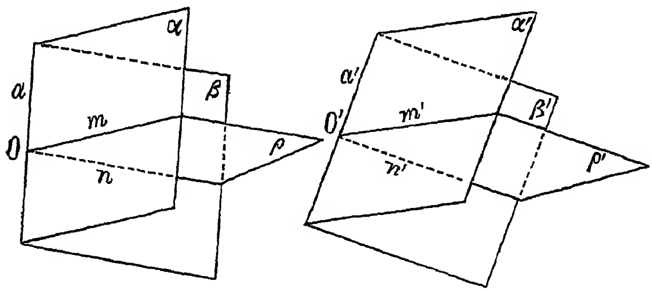
Questo teorema costituisce il teorema fondamentale della proiettività tra forme di 3.ª specie.

§ 87. **Determinazione della proiettività tra forme di 3.ª specie.** — Gli sviluppi di questo § procedono parallelamente a quelli del § 45.

Noi vogliamo esaminare la questione relativa al modo di porre l'omografia (e la correlazione) tra due spazi.

Si abbiano due spazi Σ, Σ'. Sieno α, β, due piani di Σ; α', β', due piani di Σ'. Sieno a, a', rispettivamente le rette (di Σ, Σ') determinate dalle dette coppie di piani

$(a \equiv \alpha\beta$, $a' \equiv \alpha'\beta')$. Poniamo che tra Σ, Σ', interceda una omografia π nella quale α, α', e β. β', si corrispondano.



In questa omografia le rette a, a' si corrispondono; e tra i piani α, α', intercede un' omografia, *subordinata* della data, che si può chiamare π_α; e analogamente tra β, β', intercede un' omografia π_β subordinata di π.

Alla retta a, corrisponde la a' tanto in π_α come in π_β; anzi π_α e π_β subordinano tra a ed a' la stessa proiettività π_α. Osservato ciò, la costruzione dell' omografia π, supposta data tra Σ, Σ'. si può ridurre alla costruzione delle omografie piane π_α, π_β.

Impariamo successivamente a costruire l' elemento omologo in π:

1. di un piano di Σ non passante per a.
2. di un punto qualsiasi di Σ fuori di α, β;
3. di un piano di Σ passante per a.

1. Sia dato in Σ un piano ρ non passante per a; vediamo come si può costruire il piano ρ' che gli corrisponde in Σ'.

Il piano ρ sega α, β, secondo due rette m, n, che s' incontrano in un punto O di a. Le loro omologhe rispettivamente in π_α, π_β sono due rette m', n' che s' incontrano nel punto O' di a', corrispondente ad O in π_α. Il piano $\rho \equiv m'n'$ è il corrispondente di ρ in π.

2. Sia dato in Σ un punto P fuori di α, β. Conduciamo per esso tre piani ρ_1, ρ_2, ρ_3, non passanti per a, e non appartenenti ad un fascio, questi segheranno α secondo i tre lati di un triangolo.

Costruiamo i piani $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, che corrispondono a ρ_1, ρ_2, ρ_3; essi non possono appartenere ad un fascio, perchè segano α' secondo i tre lati di un triangolo. I detti piani hanno dunque comune *un* punto P', che è il corrispondente di P in π.

3 Sia dato un piano τ di Σ per a. Prendiamo su τ un punto P, fuori di a, c, e costruiamone l'omologo P' in Σ'; il piano $\tau' \equiv a' P'$ è l'omologo di P.

Vediamo così che, se tra Σ, Σ' intercede una omografia in cui α, α', e β, β' si corrispondono secondo le omografie π_α, π_β (subordinanti tra a, a' la stessa proiettività π_a) questa omografia è determinata dalla costruzione precedente.

Ora noi ci poniamo la seguente questione:

Sieno date negli spazi Σ, Σ' le coppie di piani $\alpha\beta$ e $\alpha'\beta'$; e tra α, α' e β, β' rispettivamente due omografie π_α, π_β, facenti ugualmente corrispondere alla retta $a \equiv \alpha\beta$ la $a' \equiv \alpha'\beta'$, e stabilenti tra a, a' la medesima proiettività subordinata π_a. Esisterà sempre tra Σ, Σ' un'omografia π, la quale faccia corrispondere α, α' e β, β', e subordini tra queste coppie di piani rispettivamente le omografie assegnate π_α, π_β?

La risposta è affermativa. Infatti noi possiamo porre tra Σ, Σ' *una* omografia soddisfacente alle date condizioni, nel modo seguente:

1. Dato un piano ρ di Σ non passante per a e segante α, β rispettivamente secondo le rette m, n (vedi fig. alla pagina precedente); facciamogli corrispondere il piano ρ' determinato dalle rette m', n', corrispondenti ad m, n rispettivamente in π_α, π_β.

2. Dato un qualsiasi punto P di Σ fuori di α, β, conduciamo per P tre piani ρ_1, ρ_2, ρ_3, non passanti per a e

non formanti fascio, e costruiamo i piani $\rho'_1, \rho'_2, \rho'_3$, corrispondenti ad essi colla costruzione 1; questi piani si segano in un punto P' che facciamo corrispondere a P.

Il punto P' così ottenuto viene a dipendere soltanto da P e non dai piani ausiliari ρ_1, ρ_2, ρ_3, condotti per P.

Invero, considerando tutti i piani ρ condotti per P, e segando con essi α, β, si ha tra α, β una prospettività (di centro P). Ponendo ora tra α, α', e β, β', rispettivamente le omografie π_α, π_β, nasce tra α', β', una omografia; ma in questa omografia tutti i punti di a' (corrispondenti in π_α, π_β agli stessi punti di a) sono uniti, dunque (§ 46) l'omografia stessa è una prospettività; vale a dire tutti i piani ρ' contenenti le coppie $m'n'$ omologhe di mn (rispettivamente in π_α, π_β) passano per uno stesso punto P'.

Resta così provato che la costruzione 2 fa passare da un punto di Σ fuori di α, β ad un determinato punto di Σ' e viceversa.

Tale costruzione, applicata ai punti di α o di β, conduce pure ai loro omologhi in π_α, π_β. Si ottiene dunque fra i punti dei due spazi una corrispondenza biunivoca subordinante tra α, α' e β, β, le omografie π_α, π_β. Ed in questa corrispondenza (per la natura della costruzione), ai punti d'un piano in Σ non passante per a, corrispondono sempre i punti di un piano di Σ' non passante per a', e viceversa.

Resta da far vedere che anche ai punti di un piano passante per a in Σ, corrispondono i punti di un piano per a', in Σ', e viceversa. Per ciò basta osservare che, a due punti qualunque di Σ non posti in un piano per a, corrispondono sempre in Σ' due punti non giacenti in un piano per a', e viceversa; quindi a due punti qualsiansi di Σ, posti in un piano per a, debbono corrispondere due punti di Σ' in un piano per a' (e viceversa).

Dunque la corrispondenza biunivoca posta tra Σ, Σ', è un'omografia.

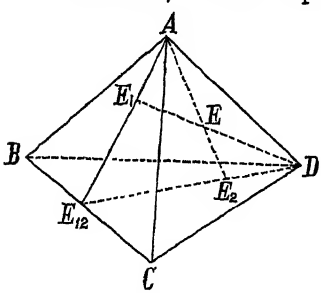
Che tale omografia (in cui α, α' e β, β' si corrispondono rispettivamente in π_α, π_β) sia unica, è già provato precedentemente. Dunque si ha il teorema:

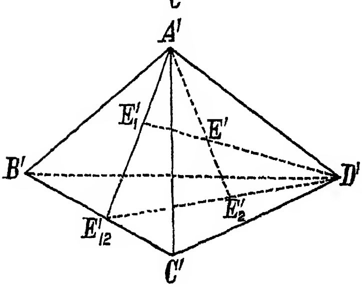
Fra due spazi Σ, Σ' esiste un' omografia determinata, in cui a due piani α, β dell' uno (Σ) corrispondono rispettivamente due piani α', β' dell' altro (Σ'), in modo che tra α, α' e β, β' intercedano rispettivamente due omografie piane assegnate, subordinanti la stessa proiettività fra le rette $\alpha\beta$, $\alpha'\beta'$.

Di questo teorema si può enunciare il correlativo per le omografie, e l' analogo relativo alla determinazione di una correlazione tra gli spazi Σ, Σ', facendo corrispondere a due piani α, β di Σ, due stelle reciproche A, B in Σ', in modo che tra la punteggiata $\alpha\beta$ ed il fascio di piani AB venga ad intercedere la stessa proiettività.

Dal teorema innanzi enunciato discende un altro modo di determinazione della omografia (o della correlazione) fra due spazi.

Si abbiano, in uno spazio Σ, 5 punti A, B, C, D, E, di cui 4 qualunque non giacciano in un piano, o, come si dice più brevemente, 5 punti *indipendenti*, similmente si abbiano 5 punti indipendenti A', B', C', D', E', in un altro spazio Σ'.





Chiamiamo E_1, E_2 le proiezioni di E fatte da D, A, rispettivamente sui piani ABC, BCD; analogamente E'_1, E'_2 le proiezioni di E' rispettivamente da D', A' su $A'B'C'$, $B'C'D'$.

Stante l' indipendenza dei punti A, B, C, D, E, e

quella di A', B', C', D', E', le quaterne di punti $ABCE_1$. $BCDE_2$, $A'B'C'E'_1$, $B'C'D'E'_2$, non possiedono terne di punti in linea retta.

Il punto E viene proiettato dalla retta AD sulla BC nel punto E_{12}, che è ugualmente la proiezione (su BC) di E_1 da A, e di E_2 da D. Così il punto E' viene proiettato dalla retta $A'D'$, sulla $B'C'$, nel punto E'_{12}, che è ugualmente la proiezione (su $B'C'$) di E'_1 da A', e di E'_2 da D'.

Dopo le precedenti osservazioni è facile vedere che esiste tra Σ, Σ' *una* omografia, che potremo indicare con $\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ A' & B' & C' & D' & E' \end{pmatrix}$, facente corrispondere A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; E, E'.

Invero si ponga tra i piani ABC, $A'B'C'$ l'omografia $\begin{pmatrix} A & B & C & E_1 \\ A' & B' & C' & E'_1 \end{pmatrix}$ determinata dalle due quaderne di punti $ABCE_1$, $A'B'C'E'_1$; similmente si ponga tra i piani BCD, $B'C'D'$ l'omografia $\begin{pmatrix} B & C & D & E_2 \\ B' & C' & D' & E'_2 \end{pmatrix}$. Queste due omografie subordinano la medesima proiettività $\begin{pmatrix} B & C & E_{12} \\ B' & C' & E'_{12} \end{pmatrix}$ tra le rette BC, $B'C'$, onde (pel teorema precedente) esiste tra Σ, Σ' una omografia determinata che fa corrispondere le coppie di piani $ABC, A'B'C'$ e $BCD, B'C'D'$. e che subordina tra di essi le omografie nominate. Tale omografia tra Σ, Σ' fa appunto corrispondere A, A'; B, B'; C, C'; D, D'; E, E'. Viceversa una omografia tra Σ, Σ', che faccia corrispondere queste 5 coppie di punti fa anche corrispondere (alla retta ED la $E'D'$ e però) ad E_1, E'_1, e così ad E_2, E'_2; quindi essa non può differire dall' omografia assegnata innanzi

Si conclude il teorema:

Tra due spazi, esiste una determinata omografia, in cui a 5 punti indipendenti dell' uno corrispondono ordinatamente 5 punti indipendenti dell' altro.

Correlativamente (se si dicono indipendenti 5 piani di cui 4 qualunque non appartengano ad una stella):

Tra due spazi, esiste una determinata omografia, in cui a 5 piani indipendenti dell' uno corrispondono ordinatamente 5 piani indipendenti dell' altro.

Similmente, facendo lo scambio dei punti coi piani nei ragionamenti che si riferiscono ad uno (solo) dei due spazi, si ha:

Tra due spazi, esiste una determinata correlazione, in cui a 5 punti indipendenti dell' uno corrispondono ordinatamente 5 piani indipendenti dell' altro.

Ossia, riassumendo.

Tra due forme di 3.ª specie, esiste una determinata proiettività, in cui a 5 elementi indipendenti dell' una corrispondono ordinatamente 5 elementi indipendenti dell' altra.

§ 88. **Omologia.** — Allorchè si considera un' omografia tra due spazi Σ, Σ', e si tien conto del fatto che ciascun punto dello spazio può esser pensato come appartenente a Σ o a Σ', si viene a riguardare i due spazi come *sovrapposti*, e si può porre la questione di assegnare gli elementi *uniti* dell' omografia, cioe gli elementi che coincidono coi loro corrispondenti. In luogo di parlare di « omografia tra spazi sovrapposti » si può anche parlare di « omografia nello spazio ».

Se in una omografia dello spazio vi sono 5 punti o 5 piani uniti indipendenti, l' omografia è identica, ossia fa corrispondere ad ogni punto e ad ogni piano sè stesso.

È questo un corollario immediato del teorema del § precedente, giacchè la corrispondenza dei detti 5 punti (o piani) a sè stessi, determina *una* omografia, e giacchè la corrispondenza identica è appunto omografica.

Dunque, se in un' omografia dello spazio, la quale non sia identica, vi sono 5 punti uniti, 4 almeno di essi giacciono in un piano (e correlativamente).

In un piano che contenga 4 punti uniti vi è un'omografia subordinata identica, se tre (almeno) di quei punti non sono in linea retta. Dunque se in una omografia non identica dello spazio vi sono 5 punti uniti, di cui 3 non in linea retta, vi è un piano tutto costituito di punti uniti (e di rette unite). Correlativamente, se nell'omografia vi sono 5 piani uniti, di cui 3 non passino per una retta, vi è una stella tutta costituita di piani uniti (e di rette unite).

Stabiliamo ora il teorema:

Se in un' omografia dello spazio vi è un piano di elementi uniti, vi è anche una stella di elementi uniti, e viceversa.

Si abbia nello spazio un' omografia non identica, dotata di un piano α di punti uniti (e di rette unite).

Sieno AA', BB' due coppie qualunque di punti corrispondenti, che possiamo supporre non poste sopra una stessa retta Le rette AB, $A'B'$ si corrispondono, ma la AB incontra il piano α in un punto unito, quindi questo punto appartiene anche alla $A'B'$; segue che le rette AB, $A'B'$, e perciò anche le AA', BB' giacciono in un piano. Dunque le rette congiungenti le coppie di punti corrispondenti dell' omografia, sono due a due incidenti, e siccome (evidentemente) esse non giacciono tutte in uno stesso piano, dovranno passare per uno stesso punto O (§ 8). Questo punto O è unito, ed ogni retta OA per esso è unita, poichè ad A corrisponde un punto A' allineato con A, O, in modo che la AA' passa per O. Similmente ogni piano β per O è unito, essendo unite tutte le rette (costituenti un fascio) passanti per O e giacenti in β.

Così è dimostrato il teorema. L' inverso si stabilisce correlativamente.

La particolare omografia (non identica) dello spazio, in cui esiste un piano e (quindi anche) una stella di elementi uniti, dicesi *omologia;* il piano e il centro della stella diconsi rispettivamente *piano d' omologia* e *centro d'omologia.*

Osservazione. — Non è escluso che il centro possa appartenere al piano d'omologia.

Segue dalla definizione che:

In una omologia dello spazio:

1. *due piani e due rette corrispondenti s'incontrano sul piano d'omologia.*

2. *due punti corrispondenti sono allineati col centro d'omologia, e due rette corrispondenti giacciono in un piano passante pel centro.*

In ogni piano (unito) pel centro si ha, come omografia subordinata, una omologia che ha come asse l'intersezione del piano considerato col piano d'omologia, e come centro il centro d'omologia.

Come corollario (cfr. § 47):

Se AA', BB' *sono due coppie di punti omologhi di una omologia dello spazio di centro* P *e piano* π; *ed* M, N *sono le rispettive intersezioni delle rette* AA'. BB' *con* π, *si ha*

$$PMAA' \;\Pi\; PNBB',$$

e correlativamente.

* Osservazione. — Il birapporto $(PMAA')$ ha dunque un valore costante (indipendente da P) che dicesi l'*invariante assoluto* dell'omologia, lo stesso numero ammette anche la definizione correlativa. Esso è uguale ad 1 se P, M coincidono; ossia se P appartiene a π.

Se $(PMAA') = -1$, l'*omologia* dicesi *armonica*, perchè in essa due punti corrispondenti qualsiansi separano sempre armonicamente il centro e l'intersezione della loro congiungente col piano d'omologia.

L'omologia armonica è *involutoria*, ossia in essa i punti corrispondenti si corrispondono in doppio modo.

L'omologia dello spazio presenta i seguenti casi particolari metrici degni di nota.

1) Il centro d'omologia P è improprio e il piano π è proprio.

Si ha allora l'*omologia affine*, nella quale a ciascun punto A corrisponde un punto A', posto sopra una retta AA'

di direzione assegnata, e tale che le distanze di A, A', da π sono in un rapporto costante (dato dall' invariante assoluto).

In particolare l' omologia affine può essere armonica, ed allora essa è una *simmetria obliqua* od *ortogonale rispetto al piano* π.

2) Il centro P è proprio, ed il piano π è improprio.

Si ha allora una *omotetia* (di centro P), in cui due punti corrispondenti sono allineati con P, e sono tali che le loro distanze da P stanno in un rapporto costante (*rapporto d' omotetia*). Questo rapporto è uguale a quello di due qualsiansi segmenti finiti corrispondenti (ed è dato dall' invariante assoluto)

In particolare si ha l' omotetia armonica, ossia la *simmetria rispetto al centro* P.

3) Il centro P e il piano π d' omologia sono ambedue impropri.

L' omologia equivale allora ad una *traslazione* dello spazio nella direzione assegnata dal centro, e si può riguardare come un caso particolare dell' omotetia, corrispondente al valore 1 del relativo rapporto.

§ 89. **Omografia assiale e biassiale.** — Se in una omografia, non identica e non omologica, dello spazio, vi sono

5 punti uniti, tre (almeno) di essi sono sopra una retta la quale risulta tutta costituita di punti uniti.	5 piani uniti, tre (almeno) di essi passano per una retta che è l' asse d' un fascio di piani uniti.

Sussiste il teorema:

Se in un' omografia dello spazio vi è una retta di punti uniti, vi è anche (almeno) un fascio di piani uniti; e viceversa.

Si abbia un' omografia (non identica) dotata di una retta a di punti uniti.

Se tutti i piani per a sono uniti, il teorema è già verificato. Se no, vi saranno per a due piani uniti al più. Si scelga A fuori di questi (eventuali) piani uniti per a. Sia A' l'omologo di A; A'' l'omologo di A'. Se A'' è sulla retta AA', questa risulta unita; essa non sarà incidente ad a, altrimenti il piano Aa sarebbe unito; tutti i piani per la retta unita AA' incontreranno a in un punto unito, e però saranno uniti. In caso opposto il piano $AA'A''$ incontrerà a in un punto unito (M), e perciò sarà unito (poichè al piano $AA'M$ deve corrispondere lo stesso piano $A'A''M$). Variando A, si potranno ottenere analogamente infiniti piani uniti, e perciò vi sarà un fascio (o una stella) di piani uniti. *c. d. d*

Il teorema inverso si dimostra correlativamente

L'omografia dello spazio, non identica e non omologica, in cui esiste una retta a di punti uniti, e (quindi anche) una retta b asse d'un fascio di piani uniti, dicesi *omografia assiale* In essa a, b sono in generale rette sghembe; ma possono anche essere incidenti, o coincidere.

Se (come a) anche b è una retta di punti uniti, l'omografia dicesi *biassiale*. In questo caso b ed a sono rette sghembe o coincidenti, altrimenti il piano ba sarebbe tutto costituito di punti uniti e l'omografia sarebbe un'omologia. Se a, b sono rette distinte (sghembe), l'omografia biassiale dicesi *iperbolica*, se a, b coincidono, essa dicesi *parabolica*. le rette a, b diconsi gli *assi* dell'omografia biassiale.

Un piano passante per un asse d'una omografia biassiale, è sempre unito; in esso si ha, come omografia subordinata, un'omologia di asse a, il cui centro è l'intersezione coll'altro asse.

Nell'omografia biassiale ogni punto, che non stia sopra uno degli assi, appartiene ad una retta unita; correlativamente in ogni piano, non contenente un asse, vi è una retta unita

Riferendoci alla prima parte dell'enunciato, sia P il punto in questione. Se l'omografia biassiale è iperbolica, vi è una retta per P incidente ad a, b, la quale risulta unita. Questa retta è la sola retta unita per P, altrimenti P (intersezione di due rette unite) sarebbe un punto unito. Se invece l'omografia biassiale è parabolica, si consideri l'omologia subordinata di essa nel piano (unito) Pa. la retta che unisce P al centro di questa omologia (su a), è una retta unita per P. ancora la retta unita per P è unica, non essendo P un punto unito

Se P, P' sono due punti (distinti) corrispondenti in un'omografia biassiale, la retta PP' è la retta unita per P. Se l'omografia biassiale è iperbolica, la nominata retta incontra a, b in due punti distinti M, N.

Se P_1, P'_1, sono altri due punti (distinti) corrispondenti, ed M_1, N_1, i punti (uniti) in cui la retta $P_1 P'_1$ incontra a, b. dimostreremo che:

Si ha la relazione:

$$MNPP' \,\Pi\, M_1 N_1 P_1 P'_1$$

Infatti, se uno dei due punti M, N coincide rispettivamente con uno dei punti $M_1 . N_1$, p. es.: M coincide con M_1, i punti PP', $P_1 P'_1$, giacciono in un piano unito per b, e sono due coppie di punti corrispondenti di una omologia di centro M ed asse b, quindi sussiste la relazione precedente (§ 47).

In caso opposto, si può considerare una retta (unita) ausiliaria MN_1, e su questa due punti (distinti) corrispondenti P_2, P'_2; si avrà:

$$MNPP' \,\Pi\, MN_1 P_2 P'_2 \,\Pi\, M_1 N_1 P_1 P'_1, \; c.d.d.$$

* Osservazione. — Il birapporto $(MNPP')$ ha dunque un valore costante (indipendente da P). Esso dicesi *invariante assoluto* dell'omografia biassiale. Esso è uguale ad 1 se M, N coincidono, ossia se l'omografia biassiale è parabolica (caso limite).

Se $(MNPP') = -1$, due punti corrispondenti qualunque separano armonicamente le intersezioni della loro congiungente cogli assi, e *l'omografia biassiale* dicesi *armonica*. Tale omografia biassiale è *involutoria*, ossia in essa gli elementi corrispondenti si corrispondono in doppio modo.

Ci limiteremo a menzionare il seguente caso particolare metrico dell'omografia biassiale, degno di nota:

L'omografia biassale iperbolica abbia un asse b all'infinito (in un piano) ortogonale all'asse proprio a Allora due punti corrispondenti P, P' si trovano sopra una perpendicolare (incidente) ad a, ed il rapporto delle loro distanze da a (invariante assoluto) è costante.

Se quel rapporto è uguale a -1, l'omografia (biassiale armonica) è una *simmetria ortogonale rispetto all'asse* a.

§ 90. * **Omografie particolari sotto l'aspetto metrico.** — Consideriamo un'omografia tra due spazi Σ, Σ'. Al piano improprio di uno dei due spazi, p. e. di Σ', corrisponde nell'altro, Σ, un certo piano λ, che dicesi *piano limite* di questo spazio. Generalmente il piano λ sarà un piano proprio, ed allora ad ogni segmento AB di una retta di Σ, non appartenente al piano λ, corrisponderà, in Σ', un segmento finito se AB non ha alcun punto comune col piano λ, ed invece un segmento infinito quando avviene il contrario.

Se il piano λ è improprio, l'omografia tra Σ, Σ' dicesi *omografia affine* o *affinità*. L'affinità tra due spazi è, dunque, un'omografia in cui i piani impropri dei due spazi si corrispondono.

L'affinità tra due spazi è determinata da 4 coppie di punti o di piani propri omologhi, indipendenti.

Se due spazi sono affini, ad un segmento finito o infinito di una retta (propria) dell'uno, corrisponde un segmento ugualmente finito o infinito di una retta (propria) dell'altro.

Punteggiate (proprie) corrispondenti in spazi affini, sono simili.

L'omografia tra due piani (propri) corrispondenti è un'affinità.

Spazi affini ad un terzo risultano tra loro affini. ossia. il prodotto di due affinità spaziali, è un'affinità.

L'affinità tra due spazi fa corrispondere a due piani paralleli dell'uno, due piani paralleli dell'altro; quindi ad ogni parallelepipedo, un parallelepipedo.

Ora in un modo analogo a quello occorso nel § 50, si può provare che. il rapporto dei volumi di due parallelepipedi corrispondenti è costante E se ne trae la seguente proprietà generale delle affinità spaziali.

Nell' affinità spaziale il rapporto di due volumi corrispondenti è costante. In particolare questo rapporto può essere uguale ad 1, nel qual caso due volumi corrispondenti sono sempre equivalenti. si ha allora *l'equivalenza affine.*

Un caso particolare molto importante dell' affinità spaziale, è la *similitudine.* Essa può definirsi come un' omografia tra due spazi, che fa corrispondere i piani impropri e le polarità assolute di essi Si può anche dire che una similitudine nello spazio è un'omografia che lascia fermo il piano improprio e subordina in esso una congruenza (§ 54). Spazi simili ad un terzo sono simili fra loro; ossia: il prodotto di due similitudini spaziali è una similitudine.

In una similitudine spaziale, due piani omologhi sono sempre simili (§ 50) perchè le loro rette improprie sono congruenti (§ 41). Ad ogni angolo (formato da due rette proprie non parallele) corrisponde sempre un angolo uguale Ad ogni diedro corrisponde pure un diedro uguale. Da ciò segue che, non solo due triangoli (finiti) corrispondenti, sono simili; ma sono pure simili due tetraedri (finiti) corrispondenti. Quindi:

In una similitudine spaziale, il rapporto di due segmenti (finiti) corrispondenti, è costante.

Infatti, due segmenti qualsiansi considerati in uno dei due spazi, ove non giacciano in un piano, sono i lati opposti di un tetraedro, a cui corrisponde nell' altro spazio un tetraedro simile.

Due figure omologhe in una similitudine dello spazio si trovano nella condizione di avere angoli e diedri corrispondenti uguali, e segmenti corrispondenti proporzionali; perciò tali figure sono *simili* nel senso della Geometria elementare. Però (riguardando i due spazi come sovrapposti) vi è luogo a distinguere una *similitudine diretta* ed una *inversa*, come vedremo bene in un caso particolare (nel caso della congruenza).

Fra le similitudini dello spazio enumeriamo quelle biassiali (iperboliche) e quelle omologiche (§§ 88, 89).

Data una similitudine biassiale iperbolica, uno dei suoi assi, b, deve giacere nel piano all' infinito, poichè questo piano è unito, l' altro asse, a, sarà una retta propria. Ora in ogni piano (unito) per a si avrà una similitudine omologica avente come asse a, di cui il centro apparterrà alla b, una tale similitudine omologica sarà una simmetria ortogonale rispetto ad a (§ 50). Si conclude che la similitudine biassiale dello spazio è una simmetria ortogonale rispetto ad a.

Data una similitudine omologica, essa avrà il piano α o il centro A all' infinito Nel primo caso, la similitudine è un' omotetia o, in particolare, una traslazione (§ 50). Nel secondo caso (supposto proprio il piano α d' omologia), il centro A sarà il polo della retta all' infinito di α rispetto alla polarità assoluta, ossia sarà il punto all' infinito delle perpendicolari al piano α.

In ogni piano (unito) per A resterà subordinata una similitudine omologica che sarà precisamente una simmetria ortogonale rispetto all' intersezione del piano stesso con α (§ 50). In conclusione, la similitudine omologica dello spazio è, in questo caso, una simmetria ortogonale rispetto al piano α.

Dunque, riassumendo, avremo:

Nello spazio, una similitudine biassiale iperbolica (non identica) è una simmetria ortogonale rispetto ad un asse; una similitudine omologica è una simmetria rispetto ad un piano, o una omotetia (in particolare una traslazione).

Il rapporto di una similitudine dello spazio può essere, in particolare, uguale ad 1; si ha allora la *congruenza*. Spazi congruenti ad un terzo risultano congruenti fra loro, ossia: il prodotto di due congruenze spaziali è una congruenza.

In una congruenza dello spazio, figure omologhe hanno angoli, diedri, e segmenti corrispondenti uguali: perciò esse diconsi *figure congruenti* o *uguali*.

Esse possono tuttavia essere *direttamente uguali*, cioè uguali nel senso della Geometria elementare, ossia sovrapponibili con un movimento; invece può riuscire impossibile di sovrapporle, nonostante l'uguaglianza dei loro elementi, per la loro inversa disposizione, ed allora si dicono *inversamente uguali*.

L'esempio più semplice di quest'ultimo caso è pòrto dalla simmetria ortogonale rispetto ad un piano.

Infatti, si considerino p. e. due tetraedri (simmetrici) che si corrispondano in una tale simmetria. Un movimento che sovrapponesse l'un tetraedro all'altro si potrebbe concepire come un movimento di tutto lo spazio collegato rigidamente al tetraedro mobile, e quindi darebbe luogo ad un'omografia col piano improprio unito, la quale (facendo corrispondere i due tetraedri) non potrebbe differire dalla simmetria proposta. Dunque nel movimento anzidetto tutti i punti del piano di simmetria dovrebbero restar fermi; ma ciò costituisce un assurdo, perchè, fissando i punti di un piano, restano fermi anche tutti i punti dello spazio rigidamente collegati con quelli, sicchè il movimento stesso non sarebbe più possibile.

Un esempio più generale di congruenza inversa si deduce dal precedente, operando come segue. Si considerino due figure simmetriche (ortogonalmente rispetto ad un piano), e si sposti mediante un qualsiasi movimento l'una di esse; si otterranno sempre due figure inversamente uguali.

Risulterà poi che l'esempio precedente si può riguardare come il caso generale della congruenza inversa.

Se fra le similitudini biassiali ed omologiche, enumerate innanzi, si cercano le congruenze, si trovano (oltre l'identità): la simmetria ortogonale rispetto ad un asse e la traslazione, che sono congruenze dirette, la simmetria rispetto ad un piano o ad un centro, che sono congruenze inverse.

§ 91 * **Congruenze.** — Approfondiamo lo studio delle congruenze generali dello spazio.

Sul piano all'infinito si ha (almeno) un punto unito A, centro di un fascio nel quale viene subordinata una congruenza diretta. La retta a polare di A, rispetto alla polarità assoluta, è pure unita, e su di essa viene pure subordinata una congruenza diretta (§ 76).

Ora A è il centro di una stella impropria unita, nella quale viene subordinata una congruenza diretta. Questa equivarrà o ad una rotazione attorno ad una retta (propria) a', oppure ad una traslazione, parallela ad un piano, di tutti i raggi della stella (§ 50 - Oss. 3.ª).

Nel fascio improprio di piani di asse a sarà subordinata una congruenza, la quale potrà essere diretta o inversa. Corrispondentemente ai due casi la *congruenza* stessa dello spazio si dirà *diretta* o *inversa*; mostreremo poi che tale distinzione dà luogo alla distinzione delle due specie di uguaglianza tra le figure, menzionata nel precedente §.

Abbiamo ora 4 casi da considerare.

1.° La congruenza nella stella impropria A è una rotazione attorno alla retta propria a', e la congruenza nel fascio improprio di piani a è diretta. Allora i piani per a (ortogonali ad a'), e così pure i punti di a', subiscono per effetto della congruenza, una traslazione. Possiamo effettuare la nominata traslazione, operando una traslazione di tutto lo spazio, parallelamente alla a'. Dopo ciò si ottiene una nuova congruenza nella quale si corrispondono le nuove posizioni P_1 occupate dai punti P dello spazio, dopo la traslazione, ed i punti P' omologhi dei detti punti P.

Ora, nel fascio di piani a' (come sulla retta impropria a, ad essa ortogonale) vi è (per ipotesi) una congruenza diretta. la quale può essere generata in due modi da una rotazione del fascio attorno ad a, nell'uno o nell'altro senso. Effettuando ancora questa rotazione, in uno qualunque dei due sensi, i piani $a'P_1$ verranno sovrapposti ai piani $a'P'$, ed i punti P_1 verranno portati ad occupare nuove posizioni P'_1, tali che le rette $P'P'_1$ saranno tutte perpendicolari incidenti alla a' Quindi fra i punti P', P'_1 intercederà una congruenza biassiale di assi a, a', la quale (§ 90) sarà identica, oppure sarà una simmetria ortogonale rispetto ad a'.

Si passa dall'uno all'altro caso con una rotazione di due angoli retti attorno ad a', e perciò si è condotti all'uno o all'altro caso, a seconda del senso in cui è stata effettuata la rotazione attorno ad a' che ci ha condotto dai punti P_1 ai punti P'_1. Scegliendo opportunamente questo senso, si portano dunque a coincidere i punti P_1 ai punti P'.

Così la congruenza si trova generata da un movimento dello spazio, il quale si compone:

α) di una traslazione parallela ad a':

β) di una rotazione attorno ad a'.

Un tal movimento dello spazio si dice un *movimento elicoidale* attorno ad a'.

Questo movimento si riduce ad una semplice rotazione (la traslazione essendo nulla) se su a' si ha l'identità, cioè se a è una retta di punti uniti, e quindi la congruenza è assiale, in caso diverso il movimento non lascia fermo alcun punto proprio, ossia la congruenza non ha punti uniti propri

Il movimento nominato si può ridurre ad una traslazione parallela ad a'; in questo caso tutti i punti impropri sono uniti, cioè si ha sul piano improprio l'identità, e la congruenza è una particolare omologia (§ 88).

2.° La congruenza subordinata nella stella impropria A è una traslazione secondo una giacitura a', e la congruenza nel fascio improprio a è ancora una congruenza diretta. ossia traslatoria.

Allora la congruenza dello spazio equivale essa stessa ad una traslazione, la quale può essere composta eseguendo:

α) prima una traslazione ortogonale ai piani del fascio improprio a, la quale sovrapponga ogni piano per a all'omologo;

β) poi una traslazione parallela ai piani di giacitura a' e ortogonale alle rette della stella impropria A (quindi parallela ai piani per a), la quale faccia sovrapporre ogni retta per A alla corrispondente.

3.° La congruenza subordinata nella stella impropria A è una rotazione attorno ad una retta propria a', e la congruenza nel fascio improprio a è inversa, vale a dire è una simmetria rispetto ad un piano α per a

Anche sulla retta unita a' viene subordinata una congruenza inversa, cioè una simmetria rispetto al punto $A' \equiv a'\alpha$.

Ora si può effettuare attorno ad a' una rotazione, la quale porti un qualunque punto P dello spazio ad occupare una nuova posizione P_1, in modo che la coppia P_1P'

giaccia sempre in un piano per a' e dalla stessa parte di essa, vale a dire si trovi sopra una parallela ad a' Dopo questa rotazione si effettui la simmetria ortogonale rispetto al piano α; il piano per P_1, ortogonale ad a', verrà sovrapposto al piano per P', ortogonale ad a' stesso, e quindi il punto P_1 verrà sovrapposto al punto P'.

Così la congruenza viene in questo caso generata, eseguendo una rotazione attorno ad a', ed una susseguente simmetria ortogonale rispetto al piano α ortogonale ad a'.

Se la rotazione nominata attorno ad a' è di due angoli retti, la congruenza risulta una simmetria rispetto al centro A'. Se invece la detta rotazione è nulla, si ha una simmetria ortogonale rispetto ad α.

4.° La congruenza subordinata nella stella impropria A è una traslazione secondo una giacitura a', e la congruenza subordinata nel fascio improprio a è inversa, vale a dire è una simmetria rispetto ad un piano α (ortogonale alle rette per A).

Allora la congruenza dello spazio si può comporre effettuando:

α) prima una traslazione dell'intero spazio nella direzione parallela alla giacitura a' ed ortogonale alle rette per A (ossia parallela al piano α), sovrapponendo così ogni retta per A all'omologa;

β) poi una simmetria ortogonale rispetto al piano α.

Questa generazione appare come un caso limite di quella relativa al caso 3.°

In particolare, se la traslazione parallela ad a' è nulla, la congruenza si riduce alla simmetria ortogonale rispetto al piano α.

Riassumendo i resultati ottenuti, avremo il

Teorema. — *Vi sono nello spazio due specie di congruenze:*

I. *Congruenze (dirette) generabili con un movimento elicoidale attorno ad un asse;* il quale può ridursi

in particolare ad una semplice rotazione attorno ad un asse o ad una traslazione (congruenze dirette assiali ed omologiche).

II. *Congruenze (inverse) generabili con un movimento di rotazione attorno ad un asse ed una susseguente simmetria ortogonale rispetto ad un piano perpendicolare a questo asse, oppure con un movimento di traslazione ed una susseguente simmetria ortogonale rispetto ad un piano parallelo alla direzione del moto traslatorio;* in particolari simmetrie rispetto ad un piano o ad un centro (congruenze inverse omologiche).

Due figure corrispondenti in una congruenza diretta sono *direttamente congruenti* od *uguali*, cioe sovrapponibili con un movimento. Invece due figure corrispondenti in una congruenza inversa sono *inversamente congruenti*, cioè hanno gli elementi corrispondenti (angoli e segmenti) uguali ciascuno a ciascuno, ma disposti in modo inverso, sicchè è impossibile (come è stato notato — § 90) di sovrapporle con un movimento.

La distinzione fra la congruenza diretta e l'inversa nello spazio, appare così analoga a quella stabilita per il piano. Ma, mentre due figure inversamente congruenti in un piano sono sovrapponibili con un movimento uscendo dal piano, manca qui (inerentemente alla nostra intuizione dello spazio) il modo di istituire una considerazione analoga.

Osservazione 1.ª — La parte I del teorema stabilito si può anche enunciare sotto la forma seguente, che presenta utili applicazioni nella statica dei sistemi rigidi:

Il movimento di un corpo rigido nello spazio, ove si abbia riguardo al suo passaggio dalla posizione iniziale alla posizione finale, può sempre considerarsi come un movimento elicoidale.

Osservazione 2.ª — Le relazioni della Geometria metrica dello spazio, si deducono tutte (in aggiunta alle

nozioni grafiche) dalle nozioni di « uguaglianza d'angoli e di segmenti. » Ora queste due relazioni fondamentali si possono definire come relazioni grafiche degli elementi dati (angoli o segmenti) col piano improprio e colla polarità assoluta, enti che denomineremo comprensivamente col nome di « assoluto » dello spazio.

In primo luogo, l'uguaglianza di due angoli $ab, a'b'$, può essere espressa dalla possibilità di far corrispondere i punti all'infinito di a, a' e di b, b' in una congruenza del piano improprio, cioè in una omografia di esso che trasformi in sè stessa la polarità assoluta (§ 54).

Invece l'uguaglianza di due segmenti (propri) $AB, A'B'$, può venire espressa (in infiniti modi diversi) dalla possibilità di far corrispondere i punti A, A' e B, B' in una congruenza diretta dello spazio. Ora, le condizioni perchè un'omografia dello spazio sia una congruenza diretta (nel caso generale in cui non si tratti d'un'omografia assiale) consistono in ciò che essa trasformi in sè l'assoluto, e che non abbia alcun punto unito proprio. Infatti una tale omografia sarà anzitutto una similitudine, ed avrà una retta unita propria a' passante per un punto unito improprio A ed associata al piano improprio nella stella A; e poichè su a' si avrà un'omografia parabolica col punto unito A (cioè una congruenza), la similitudine in questione sarà una congruenza (diretta).

Dalle considerazioni precedenti risulta che:

Tutte le relazioni della Geometria metrica dello spazio si possono definire come relazioni grafiche delle figure coll' assoluto.

§ 92. * **Estensione della legge di dualità nello spazio.** — La legge di dualità nello spazio si estende con considerazioni analoghe a quelle che hanno permesso l'estensione della legge di dualità nelle forme di 2.ª specie.

Si dicono *proprietà proiettive* delle figure nello spazio, le proprietà che si trasmettono inalterate a tutte le figure omografiche.

Tutte le proprietà grafiche sono proiettive. Ma tra queste ultime vi sono pure delle proprietà metriche (proprietà *metrico-proiettive*) che per altro possono sempre enunciarsi sotto forma grafica (Oss. 2.ª del prec. §), riuscendo allora indipendenti dall'assoluto (cfr. § 55). Ora, adoperando una reciprocità dello spazio, avremo che:

Ad ogni figura dello spazio corrisponde una figura correlativa, e ad ogni proprietà proiettiva della prima figura corrisponde una proprietà proiettiva della seconda, la quale viene dedotta collo scambio degli elementi « punto e piano ». Ciò vale comunque la proprietà proiettiva della prima figura sia stata dimostrata; e quindi anche se nella dimostrazione in parola si sieno impiegati concetti metrici, non contenuti nei postulati I, II, III, IV, V. VI, sui quali abbiamo fondato la Geometria proiettiva.

Invece, dalla non esistenza di un ente dello spazio, che abbia un significato metrico correlativo al piano improprio e alla polarità assoluta di esso, si trae che: *La legge di dualità dello spazio non vale, per le proprietà metriche, non proiettive, delle figure in esso contenute.*

Osservazione. — La estensione della legge di dualità dello spazio per la Geometria proiettiva è stata stabilita *a posteriori*, valendosi di una reciprocità. Ma a questo riguardo può farsi la seguente osservazione. I postulati della ordinaria Geometria metrica possono enunciarsi come proposizioni grafiche, allorchè si tenga conto dell'interpretazione grafica delle nozioni metriche in relazione all'assoluto.

Allora si può riconoscere che tali proposizioni non sono logicamente indipendenti dai postulati della Geometria proiettiva, ma possono anzi dimostrarsi in base a questi.

Così ogni ragionamento della Geometria metrica può trasformarsi in un ragionamento della Geometria proiettiva, fondato sui postulati di essa, dove si consideri in modo speciale un piano ed una certa polarità di esso (costituenti l'assoluto); tale ragionamento è traducibile colla legge di dualità e conduce ad un teorema correlativo del primo, ogni qualvolta questo sia un teorema proiettivo, ossia riesca indipendente dagli enti speciali considerati.

Per tal modo si può dire che si viene a stabilire *a priori* l'estensione della legge di dualità dello spazio.

APPENDICE

I. **Geometria astratta.** — Noi abbiamo cercato di porre in luce come la Geometria proiettiva si riferisca a concetti *intuitivi*, psicologicamente ben definiti, e per questo appunto non abbiamo tralasciato occasione di mostrare la concordanza fra le deduzioni stabilite e l'intuizione. D'altra parte però, è stato avvertito fino dal principio che tutte le deduzioni sono fondate soltanto sopra quelle proposizioni, desunte immediatamente dall'intuizione, le quali vengono enunciate come postulati.

Sotto questo punto di vista la Geometria svolta, appare come un organismo logico, nel quale i concetti elementari di « punto » « retta » e « piano » (e quelli definiti mediante questi) figurano soltanto come elementi di alcune relazioni logiche primitive (i postulati) e di altre relazioni logiche che ne vengono dedotte (i teoremi). Il contenuto intuitivo di quei concetti resta perfettamente indifferente. Da questa osservazione scaturisce un principio molto fecondo, che informa tutta la moderna Geometria: *il principio della sostituibilità degli elementi geometrici.*

Si abbiano dei concetti comunque definiti i quali vengano convenzionalmente designati coi nomi di « punto »,

« retta » e « piano » ; e suppongasi che tra di essi intercedano le relazioni logiche fondamentali enunciate dai postulati della Geometria proiettiva. Tutti i teoremi della detta Geometria avranno ancora significato e validità, ove si intenda di considerarli non più come esprimenti relazioni fra « punti », « rette » e « piani » intuitivi, ma invece come relazioni tra i concetti dati, i quali sono stati convenzionalmente designati coi detti nomi.

In altre parole: *La Geometria proiettiva può essere considerata come scienza astratta, e ricevere quindi interpretazioni diverse da quella intuitiva, fissando che gli elementi (punti, rette e piani) di essa, sieno concetti comunque determinati, tra i quali intercedono le relazioni logiche espresse dai postulati.*

Un primo corollario di questo principio generale è la legge di dualità dello spazio Per stabilirla, basta invero fissare che il nome « punto » designi l'ente intuitivo « piano », e il nome « piano » designi l'ente intuitivo « punto »; osservando che (fissato convenientemente il significato di alcune denominazioni) i postulati della Geometria proiettiva vengono così soddisfatti

II. **Coordinate proiettive.** — Noi andiamo ora ad assegnare una nuova applicazione di quel principio, proponendoci il problema della rappresentazione analitica dei punti dello spazio mediante coordinate.

Per precisare i termini del problema ci proponiamo di far corrispondere biunivocamente ai punti (propri ed impropri) dello spazio, i mutui rapporti delle quaterne di numeri x_1, x_2, x_3, x_4, (*coordinate proiettive omogenee*) in modo che i piani vengano rappresentati da equazioni lineari.

Indichiamo con Σ' l'insieme dei gruppi omogenei di valori $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$. E designiamo l'elemento di Σ', cioè la quaterna $x_1\, x_2\, x_3\, x_4$, definita a meno di un fattore di proporzionalità, col nome di « *punto analitico* » ; e simil-

mente col nome di «*piano analitico*» l'insieme dei punti analitici definito da un'equazione lineare omogenea

$$a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = o$$

(dove le a sono costanti).

Date le precedenti convenzioni, possiamo considerare Σ' come uno «*spazio analitico*», al quale possiamo estendere convenzionalmente tutte le denominazioni stabilite per lo spazio ordinario, e pel quale andiamo quindi a verificare i postulati della Geometria proiettiva.

Stabilire per lo spazio (intuitivo) Σ un sistema di coordinate proiettive omogenee (ciò che e richiesto dal nostro problema), equivarrà quindi a porre tra i punti di Σ e di Σ' una corrispondenza biunivoca, in cui ai punti di un piano in Σ corrispondano in Σ' i punti di un piano (analitico); vale a dire il nostro problema si ridurrà così al problema di porre un'omografia tra lo spazio Σ e lo spazio (analitico) Σ'.

Cominciamo dunque dall'accennare rapidamente alla verifica dei postulati della Geometria proiettiva per lo spazio analitico Σ'.

Anzitutto si deve chiamare «*retta* (*analitica*)» l'insieme dei punti analitici comuni a due piani analitici

$$(1)\begin{cases} a_x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + a_4 x_4 = o \\ b_x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 + b_4 x_4 = o \,. \end{cases}$$

La retta nominata è comune non solo ai due piani nominati, ma anche a tutti i piani

$$\lambda a_x + \mu b_x = o\,,$$

i quali al variare dei parametri λ, μ (e del loro rapporto) descrivono un *fascio*.

Se $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$, $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$ sono due sistemi di soluzioni delle equazioni (1) (ossia due punti della retta), tutte le altre soluzioni sono date da

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda y_1 + \mu z_1 \\ x_2 &= \lambda y_2 + \mu z_2 \\ x_3 &= \lambda y_3 + \mu z_3 \\ x_4 &= \lambda y_4 + \mu z_4 : \end{aligned}$$

variando il rapporto $\lambda : \mu$ si hanno così tutti i punti della retta.

Ora si possono subito verificare i postulati del 1.° gruppo: *a) b) c) d) e) f)* (o I, II, III — cfr. i §§ 2, 3).

Infatti essi si traducono subito in note proprietà dei sistemi di equazioni lineari.

Consideriamo per esempio il postulato *a)* « due punti appartengono ad *una* retta »

Si abbiano due punti analitici $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$, $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$: essi appartengono ad *una* retta analitica costituita dai punti

$$(\lambda y_1 + \mu z_1,\quad \lambda y_2 + \mu z_2,\quad \lambda y_3 + \mu z_3,\quad \lambda y_4 + \mu z_4)$$

(dipendenti dal rapporto dei parametri $\lambda : \mu$).

Il postulato *b)* è verificato per definizione.

Il postulato *c)* « tre punti, non appartenenti ad una retta, appartengono ad un piano » si verifica come segue.

Sieno $(y_1\, y_2\, y_3\, y_4)$, $(z_1\, z_2\, z_3\, z_4)$, $(u_1\, u_2\, u_3\, u_4)$ tre punti analitici, non appartenenti ad una retta, cioè incapaci di soddisfare due equazioni lineari e tali che non si abbiano valori di λ, μ, per cui

$$u_i = \lambda y_i + \mu z_i \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

I punti (y_i), (z_i), (u_i) individuano il piano costituito dai punti $(\lambda z_i + \mu z_i + \nu u_i)$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. piano che ha come equazione.

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \end{vmatrix} = o.$$

Il postulato *d)* viene verificato subito, perchè tre equazioni lineari omogenee indipendenti (cioè tre piani analitici non aventi comuni gli infiniti punti di una retta) hanno comune un solo sistema di soluzioni, definite a meno di un fattore (cioè un punto analitico).

È facile verificare analogamente i postulati *e)*, *f)*.

Consideriamo ora i postulati IV, V, VI, del 2.° e 3.° gruppo (§§ 5, 6, 18), ed accenniamo come essi possano verificarsi per la retta analitica, donde segue la loro verifica per le altre forme di 1.ª specie.

I punti

$$x_i = \lambda\, y_i + \mu\, z_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3.\ 4).$$

di una retta analitica, vengono ordinati in due sensi opposti secondo i valori crescenti, o decrescenti, del rapporto $\lambda : \mu$. Si ottengono così due ordini (l'uno inverso dell'altro), aventi come primo elemento lo stesso punto (y_i), che corrisponde al valore

$$\frac{\lambda}{\mu} = \mp \infty \quad (\lambda = o\,.\ \mu = \mp \infty);$$

questo punto è un punto qualunque della retta.

I detti ordini soddisfano a tutte le proprietà degli ordini naturali d'una retta intuitiva (aggiunto il punto improprio). Così si verificano i postulati IV e VI, quest'ultimo corrispondendo alla introduzione dei numeri irrazionali. È poi anche facile verificare il postulato V, osservando che l'operazione del *proiettare* viene rappresentata, nello spazio analitico, da una sostituzione lineare.

Si può dunque affermare che « *valgono per lo spazio analitico tutti i postulati della Geometria proiettiva, e quindi tutti i teoremi di essa* ».

Ciò premesso, si può porre un'omografia tra lo spazio intuitivo Σ, e lo spazio analitico Σ', fissando che a 5 punti indipendenti di Σ, corrispondano 5 punti indipendenti di Σ'. Potremo fissare in Σ' i punti:

$$(1000),\ (0100),\ (0010),\ (0001),\ (1111),$$

poichè i sistemi di numeri sopra indicati sono tali che (il determinante di 4 di essi non è nullo, e perciò) 4 qualunque di essi non soddisfano ad una stessa equazione

lineare, ossia sono punti analitici indipendenti. Possiamo designare con

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ E,$$

i punti di Σ corrispondenti ai nominati punti di Σ'.

Siccome questa corrispondenza determina l'omografia tra Σ e Σ', così possiamo concludere:

Volendo rappresentare i punti dello spazio con coordinate proiettive omogenee (in guisa che l' equazione del piano risulti lineare), si può fissare in esso 5 punti indipendenti:

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ E,$$

e far loro corrispondere rispettivamente i gruppi di coordinate

$$(1000),\ (0100),\ (0010),\ (0001),\ (1111);$$

ma dopo ciò restano determinate, a meno di un fattore di proporzionalità, le coordinate di ogni altro punto dello spazio.

I punti A_1, A_2, A_3, A_4, diconsi *punti fondamentali*, o vertici del *tetraedro fondamentale*, del sistema di coordinate; il punto E dicesi *punto unità*.

Osservazione 1.ª — È facile assegnare il significato geometrico delle coordinate x_i di un punto P o meglio dei loro mutui rapporti. Noi ci limiteremo ad enunciarlo. Si proiettino E e P dalla retta

$$a_{lm} = A_l A_m$$

sopra la retta

$$a_{ik} = A_i A_k,$$

spigolo opposto del tetraedro fondamentale, e si indichino con E_{ik}, P_{ik} le proiezioni; allora il birapporto

$$(A_i\ A_k\ E_{ik}\ P_{ik}) = \frac{x_i}{x_k}.$$

Per dimostrare questa proposizione basterebbe far vedere che colla costruzione indicata vengono effettivamente

definiti, a meno di un fattore, 4 numeri (coordinate omogenee) appartenenti ad un punto P dello spazio, in guisa che, variando P in un piano, i detti numeri soddisfino sempre ad una equazione lineare.

Osservazione 2.ª — La rappresentazione dei punti dello spazio con coordinate proiettive omogenee è stata stabilita in base ai soli postulati I, II, III, IV, V, VI, della Geometria proiettiva. Questi postulati bastano dunque a fondare tutta la Geometria analitico-proiettiva.

Osservazione 3.ª — Scaturisce in particolare dalle precedenti osservazioni che il birapporto di 4 elementi di una forma di 1.ª specie (p. e. di 4 punti di una retta) può definirsi senza intervento di nozioni metriche.

Osservazione 4.ª — Le omografie dello spazio. allorchè i punti di questo vengono rappresentati con coordinate proiettive omogenee, vengono rappresentate da sostituzioni lineari omogenee sulle coordinate.

Si dimostri per esercizio.

Osservazione 5.ª — Dalle coordinate proiettive omogenee, che abbiamo definito nel modo più generale, si desumono come casi particolari le più usuali rappresentazioni dei punti dello spazio che occorrono nella Geometria analitica.

In particolare, si assuma come tetraedro fondamentale quello costituito da tre piani due a due ortogonali:

$$x_1 = 0, \; x_2 = 0, \; x_3 = 0,$$

e dal piano all'infinito: $x_4 = 0$. Allora i rapporti

$$\frac{x_1}{x_4}, \quad \frac{x_2}{x_4}, \quad \frac{x_3}{x_4},$$

formati colle coordinate proiettive omogenee di un punto P, diventeranno le sue coordinate cartesiane ortogonali relative alla terna di piani $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

III **Elementi immaginari.** — La rappresentazione dei punti dello spazio mediante coordinate (proiettive) conduce ad allargare lo spazio stesso coll'introduzione dei punti (e quindi delle rette e dei piani) *immaginari*. Questi elementi immaginari si presentano come enti convenzionali, corrispondenti a valori complessi delle coordinate, e traggono la loro origine dall'utilità di stabilire un perfetto riscontro del campo geometrico col campo ampliato dei numeri. Essi permettono di tradurre in linguaggio geometrico i calcoli che conducono alla soluzione di un problema, operando su quantità comunque complesse, e giungendo pure talvolta, per tal via, alla determinazione di quantita reali

Dopo aver riconosciuto il fatto che « le elementari leggi delle operazioni algebriche trovano la loro espressione in tutto un ordine di proposizioni fondamentali della Geometria proiettiva dello spazio, quando i punti dello spazio stesso vengano rappresentati con coordinate proiettive (1) », non può sorgere alcun dubbio sulla legittimità dell'uso degli elementi immaginari in tale campo della Geometria; la giustificazione risiede in ciò che le leggi fondamentali del calcolo algebrico sono valide nel campo dei numeri complessi, come in quello più ristretto dei numeri reali. Di guisa che, ragionamenti appartenenti alla Geometria proiettiva, istituiti sulla considerazione di elementi reali, si estendono al caso in cui alcuni degli elementi stessi sieno immaginari, conducendo pur talvolta a dei resultati in cui entrano soltanto elementi reali.

Quest'ultima circostanza si presenta sempre, quando si abbiano due elementi *immaginari coniugati* (cioè aventi coordinate complesse coniugate) mediante i quali si determini un terzo elemento; così per esempio quando si

---

(1) Vengono eccepite le proposizioni che si riattaccano alla nozione della disposizione naturale di una forma elementare.

determina la retta congiungente due punti immaginari coniugati, ecc.

Ci limiteremo a dare rapidamente alcuni esempi dell'uso fecondo, che può farsi degli elementi immaginari, facendo espressamente rilevare la più vasta generalità che viene portata nella concezione degli enti geometrici.

a) Ogni proiettività π in una forma di 1.ª specie ha due elementi uniti, che (la proiettività essendo reale) possono essere reali e distinti, o reali e coincidenti, o immaginari coniugati.

Ora nel 1.° caso segue facilmente dal § 35 che gli elementi uniti della proiettività (iperbolica) sono gli elementi doppi d'una involuzione I che trasforma in sè stessa la π, ossia che è *permutabile* con essa ($I\pi \equiv \pi I$).

Ebbene, questa conclusione si estende ancora al caso in cui la π sia una proiettività ellittica. la involuzione I definita dai suoi elementi uniti, presi come elementi doppi. riesce reale (ellittica) e permutabile con π.

b) In un piano, le rette (reali) esterne rispetto ad una conica (reale) si debbono riguardare come secanti in due punti immaginari coniugati, e correlativamente si dica pei punti esterni.

Così due coniche (reali) si debbbono riguardare come aventi in comune due punti immaginari coniugati, quando vi è una retta (reale) su cui esse determinano la stessa involuzione ellittica di punti coniugati, ecc.

Allora (§ 59) si deve dire che tutti i cerchi di un piano hanno comuni due punti immaginari coniugati all'infinito, che sono i punti doppi dell'involuzione assoluta; tali punti vengono denominati «*punti ciclici*» del piano. Due cerchi (non tangenti) hanno poi comuni altri due punti (reali o no) intersezioni del loro asse radicale. Quindi il fascio di cerchi appare come un caso particolare del fascio di coniche, definito quest' ultimo come l'insieme delle coniche che passano per 4 punti reali o immaginari

(coniugati a coppie), ed il teorema del § 40 viene a rientrare nella proposizione dedotta dal teorema di Desargues in fine al § 65 (pag. 238).

Similmente, il teorema del § 71 per cui « due coniche che hanno due punti comuni si corrispondono in due omologie, aventi come asse la congiungente i detti punti » viene ora esteso in guisa da racchiudere come corollario la proposizione seguente: « due circoli si possono sempre riguardare in due modi come omotetici » ecc.

c) Una polarità (reale) del piano definirà ora sempre una *conica* fondamentale, la quale sarà *immaginaria*. se la polarità in questione è uniforme. Quindi molte proprietà delle coniche non uniformi, dimostrate mediante la considerazione della loro conica fondamentale, si estenderanno alle polarità uniformi.

In particolare si potrà considerare la conica fondamentale della polarità assoluta nel piano improprio, la quale si presenterà come un *cerchio all' infinito comune a tutte le sfere* dello spazio, ecc.

Senza bisogno di moltiplicare gli esempi (che d'altronde esigerebbero più lunghe spiegazioni) ben si comprende l' utilità dell' introduzione nella Geometria degli elementi immaginari, concezione resa familiare dalla Geometria analitica.

Ma siffatti elementi, così introdotti, appariscono soltanto come puri nomi, cui non risponde alcun oggetto geometrico, e quindi sembrano privi di utilità ogni qualvolta non vengano eliminati alla fine della trattazione in cui sono occorsi.

Or bene, si può assegnare il significato geometrico degli elementi immaginari, nel modo che rapidamente accenniamo:

Limitiamoci alla considerazione dei punti immaginari.

Si abbia un punto immaginario

$$P \equiv (x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ x_3 + iy_3,\ x_4 + iy_4),$$

e si consideri il punto ad esso coniugato

$$P' \equiv (x_1 - iy_1,\ x_2 - iy_2,\ x_3 - iy_3,\ x_4 - iy_4).$$

La retta PP' che congiunge i due punti è reale, come si riconosce scrivendone le equazioni. Sopra di essa vi è una ben determinata involuzione ellittica (reale) di cui P, P' sono i punti doppi.

La coppia di punti immaginari coniugati P P', *corrisponde dunque alla reale esistenza di una involuzione ellittica sopra una retta reale.*

Nasce ora il problema di *staccare* i due punti coniugati costituenti la coppia, cioè di distinguerli l'uno dall'altro, collegando a ciascuno di essi un diverso ente geometrico.

Immaginiamo di proiettare la coppia PP' sopra uno spigolo del tetraedro fondamentale, p. e. su $a_{12} \equiv A_1 A_2$ dallo spigolo opposto a_{34}; saranno

$$P_1 \equiv (x_1 + iy_1,\ x_2 + iy_2,\ o, o)$$
$$P_1' \equiv (x_1 - iy_1,\ x_2 - iy_2,\ o, o)$$

le rispettive proiezioni di P, P', e basterà staccare i due punti della coppia $P_1 P_1'$ per ottenere la distinzione di P, P'.

Ora consideriamo un qualsiasi punto M della retta a_{12}, come determinato dal rapporto $\lambda + i\mu$ della sua seconda coordinata alla prima; potremo attaccare i due sensi opposti della retta ai due segni positivo e negativo, da cui il coefficiente μ può essere affetto.

Allora i due punti P_1, P_1', corrispondono a due rapporti immaginari coniugati:

$$\lambda_1 + i\mu_1 = \frac{x_2 + iy_2}{x_1 + iy_1}$$

$$\lambda_1 - i\mu_1 = \frac{x_2 - iy_2}{x_1 - iy_1},$$

e quindi vengono collegati a due sensi opposti della retta a_{12}, e così staccati l'uno dall'altro.

Ai due sensi della retta a_{12} corrispondono d'altronde due sensi opposti della retta PP' (proiettata da a_{34} su a_{12}); così i punti P, P' vengono attaccati a due sensi opposti della retta che li congiunge, e per tal modo distinti l'uno dall' altro

Possiamo dunque concludere che:

La considerazione di un punto immaginario nello spazio, corrisponde alla complessiva considerazione di una involuzione ellittica sopra una retta reale, e di un senso di questa retta.

Questa interpretazione degli immaginari in Geometria è dovuta a STAUDT (Beitrage zur Geometrie der Lage), che partendo da essa, con minute considerazioni, ha esteso per via sintetica al campo più largo, comprendente gli elementi immaginari, la parte fondamentale della Geometria proiettiva.

In molte questioni tuttavia basta introdurre gli immaginari a coppie (di elementi coniugati), ciò che può farsi in un modo molto più semplice. Il SEGRE ha sviluppato questa trattazione in uno scritto di natura didattica, ponendo a base il teorema fondamentale: « Data in una forma di 1.ª specie una proiettività ellittica, esiste una determinata involuzione, pure ellittica, permutabile con essa ».

Noi rimandiamo gli studiosi alla memoria del SEGRE: « *Le coppie di elementi immaginari nella geometria proiettiva sintetica* » (Memorie dell'Accademia di Torino, 1888), e al « *Trattato di Geometria proiettiva* » del SANNIA.

IV. **Cenno storico-critico sulla genesi dei concetti fondamentali della Geometria proiettiva.** — È utile gettare un rapido sguardo alla genesi dei principali concetti che stanno a base della Geometria proiettiva.

1. Sebbene la Geometria proiettiva, intesa come scienza, appartenga a questo secolo, se ne possono riconoscere i germi fino nella *Prospettiva* di EUCLIDE e di

Eliodoro. Col fiorire delle arti, e segnatamente della pittura e dell'architettura, nel Rinascimento, la Prospettiva ebbe numerosi cultori, come L. B. Alberti e Leonardo da Vinci; Guido Ubaldo del Monte ne dimostrava più tardi i principii matematici (1600) (1).

La considerazione delle figure geometriche dal punto di vista della Prospettiva, tende a porre in rilievo le loro proprietà grafiche, discernendole dalle proprietà metriche, e induce così ad una concezione più generale delle figure stesse.

Inoltre nella Prospettiva sono implicitamente contenute le due *operazioni del proiettare* e *segare*, fondamentali per la Geometria proiettiva. La prima operazione trova infatti riscontro nel processo della visione, per cui si conducono dal centro dell'occhio (centro di proiezione) tutti i raggi luminosi che vanno ai punti di una figura: e la seconda operazione corrisponde alla formazione della immagine della figura veduta. sopra un quadro assegnato (piano di sezione)

Sembra che spetti a Desargues (1593-1661) e a Pascal (1623-1662) il merito di aver applicato nella Geometria, e segnatamente nella teoria delle *coniche*, i metodi della Prospettiva (2).

Le coniche erano state considerate dagli antichi come sezioni del cono circolare retto, e più generalmente da Apollonio (247 a. C.) anche come sezioni d'un cono circolare obliquo; questo geometra aveva dato di esse uno studio approfondito, ponendone in luce molte delle più belle proprietà. Ma non pare che alcuno, prima di Desargues, abbia avuto l'idea feconda di cercare il fondamento

(1) Si può consultare a questo proposito la « *Histoire des Sciences Mathématiques en Italie* » di Guglielmo Libri (Parigi - Jules Renouard et C.ie, 1838).

(2) Cfr. Chasles. « *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie....* » (Bruxelles, 1837).

comune delle proprietà delle coniche nel fatto che esse sono proiezioni di un cerchio.

Tale concezione sta a base delle trattazioni di Desargues (1639) e Pascal (1640), mirabili non meno per l'originalità dei punti di vista che per i nuovi ed importanti resultati (cfr. p. e. i teoremi dei §§ 64 e 65).

Ma ciò che a noi preme di rilevare, è come l'introduzione dei metodi della Prospettiva nello studio delle coniche appaia rispondente allo spirito di generalità, che animava oramai le ricerche scientifiche, mentre le anguste divisioni della Geometria dei Greci più non soddisfacevano al bisogno di raggruppare molte verità in una sola e di farle scaturire in modo più luminoso da uno stesso principio.

La concezione di Desargues permetteva di considerare come rientranti in una sola famiglia le tre specie di coniche (ellisse, iperbole, parabola) che per lo innanzi erano state tenute distinte, e ciò conformemente alla considerazione dei punti impropri, dovuta allo stesso Desargues.

Abbiamo già spiegato (nota a pag 10) la genesi psicologica dell'idea di riguardare due rette parallele come aventi comune un punto all'infinito (1).

Certo la spiegazione di questa genesi non serve a giustificare con tutto rigore l'uso dei punti impropri nella Geometria, nè si sa, d'altra parte, quale giustificazione ne desse il Desargues, che probabilmente si riferiva (come esplicitamente fece il Leibnitz) a delle nozioni di continuità. Ma la nominata giustificazione esige un esame critico delle proposizioni fondamentali della scienza, che può essere dato soltanto dal maturo spirito d'analisi proprio del nostro secolo.

D'altronde nel metodo delle proiezioni i punti impropri si presentano da sè, ed, in quanto non ci si scosti dal

(1) L'idea analoga di considerare due piani paralleli come aventi comune una retta all'infinito è molto posteriore (dovuta a Poncelet).

detto metodo, trovano in esso il fondamento del loro legittimo uso.

E la storia della Matematica ci avverte che tutti i concetti fondamentali, venuti ad allargare le idee dominanti nei vari campi di essa, sono stati introdotti nella scienza in un modo analogo, trovando solo più tardi la loro piena ed esatta giustificazione (1).

2. Lo spirito di generalità, di cui si è riconosciuto un' esplicazione nei metodi geometrici di Desargues e di Pascal, ha la sua più alta espressione nella *Geometria analitica* creata da DES CARTES, coll' applicazione dell' algebra alla teoria delle curve, nel 1637.

Prescindendo dall' uso delle figure e ravvicinando, sotto uno stesso tipo di equazione, enti geometrici di forma differente, si veniva ad introdurre nella Geometria quello stesso carattere di astrazione e di universalità, che è proprio dei procedimenti analitici.

L' attrattiva che la nuova scienza esercitò sugli spiriti più elevati fu così potente, che, quindi innanzi, per un lungo periodo di tempo, ogni altro metodo d' investigazione geometrica fu quasi negletto. Così, in conseguenza del rinnovamento portato nelle Matematiche dalle idee di Des Cartes, mentre nasceva il *Calcolo infinitesimale*, l' indirizzo di Desargues e di Pascal ebbe pochi continuatori. Sono tuttavia da citare i nomi di DE LA HIRE (1640-1718) e di LE POIVRE (1704), geometri che riattaccandosi in parte al citato indirizzo, ed in parte alla Geometria degli antichi, arricchirono di bei resultati la teoria delle coniche. In particolare De La Hire pose i fondamenti della teoria delle polari, che pare fosse contenuta solo in germe nell' opera di Pascal, e che, ad ogni modo,

---

(1) Così si dica p. e. relativamente all' introduzione nell' algebra dei numeri irrazionali, negativi e complessi, venuti ad allargare il primitivo campo dell' aritmetica.

non era stata tramandata dopo di lui. Ancora ricorderemo il « *Traité de Perspective* » di LAMBERT (1759), nel quale sono fatte applicazioni del metodo delle proiezioni ad uso tecnico, come già Desargues insegnò. trattando numerosi problemi di Gnomonica, ecc.

3. Ma, se lo spirito analitico aveva dominato quasi sovrano nella Geometria durante il secolo successivo alle scoperte di Des Cartes e di Leibnitz, la reazione, osserva l'HANKEL (1), non poteva mancare. Essa si riattacca più da vicino alla tecnica che alla scienza. Le arti e le industrie, ed i problemi della Prospettiva, della Gnomonica, del taglio delle pietre, delle macchine, che le interessano, esigevano soluzioni più spedite e dirette, rispondenti ai progrediti bisogni; nè in questo la tecnica del disegno poteva venir sostituita da procedimenti analitici.

Abbracciando insieme questi vari problemi tecnici in una teoria scientifica, creò MONGE la *Geometria descrittiva* (1795), nella quale egli seppe fondere armonicamente vari indirizzi della Matematica pura ed applicata (sublime caratteristica di un uomo di genio!). E quanto. anche nella teoria, egli si sia levato alto, viene attestato dal fatto che egli « potè fare dell'Algebra colla Geometria, come Cartesio aveva fatto della Geometria coll'Algebra » (2).

Nella Geometria di Monge e della sua scuola non c'è ancora la Geometria proiettiva. Ivi si fa uso sistematico del metodo delle proiezioni, soltanto nel caso particolare delle proiezioni ortogonali. Ma i concetti analitici, profondamente assimilati e luminosamente trasformati, hanno ormai portato ad un più alto grado di generalità la concezione degli enti geometrici coll'introduzione degli

---

(1) Cfr. la prefazione storica al suo libro « *Die Elemente der projectivischen Geometrie* » (Teubner — Lipsia, 1875).

(2) Cfr. CHASLES « *Aperçu historique* ecc. »

elementi *immaginari* e con quella del *principio di continuità,* di cui PONCELET doveva fare più tardi un uso così fecondo, sia pure che non riuscisse a giustificarlo in modo del tutto soddisfacente

Ed ecco la « *Géométrie de position* » di CARNOT (1803), ispirata a questa più vasta concezione degli enti geometrici, nella quale, ad esempio, appare generalizzato il concetto del quadrilatero (semplice) noto agli antichi, colla considerazione del *quadrilatero completo*, cui si aggiunse più tardi il *quadrangolo completo.*

La citata « *Géométric de position* » e l' « *Essai sur la théorie des transversales* » del medesimo autore, debbono essere (secondo lo CHASLES) ravvicinati all' opera di Monge, in quanto questi lavori si vogliano riattaccare ai metodi di Desargues, Pascal, La Hire e Le Poivre, e considerarli come una continuazione di essi nel duplice ordine di relazioni grafiche (o descrittive) e metriche, ormai differenziatesi.

Ma l'opera di Monge, come quella che conteneva una generalizzazione immensa dei metodi della Prospettiva. e poneva in una stretta relazione di reciproca dipendenza la Geometria del piano e dello spazio, deve considerarsi come la più efficace preparazione della nuova scienza che ha permesso più tardi di penetrare tutti i rami della Geometria, e sostituirvi con successo i procedimenti della Geometria degli antichi.

4. La scienza nuova preparata da tanti elementi, la *Geometria proiettiva* propriamente detta, sorge col « *Traité des propriétés projectives des figures* » di PONCELET (1822) Nel quale trattato si fa uso sistematico delle proiezioni e sezioni intese nel senso più generale, e si ricercano appunto sistematicamente quelle proprietà delle figure piane, che hanno carattere d'invarianza rispetto alle operazioni nominate *(proprietà proiettive);* tra queste si trovano in prima linea le proprietà grafiche, e quindi

le proprietà metriche che si riattaccano alla nozione del *rapporto anarmonico (o birapporto).*

Tutta l'opera di Poncelet è dominata dall'idea di ricondurre, mediante proiezioni. lo studio delle figure piane a quello di qualche caso particolare notevole. così lo studio delle coniche a quello del cerchio (come gia Desargues e Pascal), lo studio di un quadrilatero a quello di un parallelogrammo, ecc.

Inoltre a Poncelet si deve la considerazione generale dell'*omologia solida,* fondamento della Prospettiva in rilievo, mentre l'omologia piana (che si riattacca al teorema dei triangoli omologici, dovuto a Desargues, ed ora più semplicemente dimostrato col metodo di Monge) già si trova considerata da De La Hire per dedurre le coniche dal cerchio.

Un alto interesse deve anche essere attribuito allo sviluppo dato da Poncelet alla teoria della *polarità* rispetto ad una conica, teoria di cui abbiam detto doversi al De La Hire i teoremi fondamentali. È segnatamente un merito di Poncelet di avere concepito la polarità come uno strumento generale e fecondo per dedurre sistematicamente nuove proprietà (grafiche e metrico-proiettive) delle figure. Questo strumento permise, p. e., al Brianchon di dedurre dal teorema di Pascal sull'esagono iscritto ad una conica, il teorema, sull'esalatero circoscritto, che porta il suo nome.

Ma vi è nell'uso di queste considerazioni qualche cosa di più che un metodo conducente alla scoperta di nuove proprietà geometriche; Gergonne (autore degli « *Annales de Mathématiques* » dal 1810 al 1831) assorgeva da esse ad uno dei più bei principii della moderna Geometria: il *principio di dualità.*

5. Di poco posteriore all'opera di Poncelet, colla quale sorge in Francia la Geometria proiettiva, è il « *Barycentrische Calcul* » di Mobius (1827) che, seguendo

un indirizzo analitico-proiettivo, porta un nuovo ed importante contributo a questa scienza.

Si deve a Mobius uno dei concetti fondamentali della moderna Geometria, cioè il concetto generale di *corrispondenza biunivoca* o *trasformazione*, nel piano e nello spazio. Ed anche a Möbius stesso appartiene la considerazione di quelle particolari corrispondenze che stanno a base della Geometria proiettiva: *le omografie* o *collineazioni*. Esse occupano nella Geometria proiettiva un posto analogo a quello che spetta al concetto del *movimento* nella Geometria metrica. Come il movimento permette di mutare la posizione di una figura dello spazio, senza alterarne le reciproche relazioni metriche (che comprendono *tutte* le relazioni considerate dal geometra), così l'omografia fornisce una trasformazione delle figure, per la quale in generale non tutte le relazioni di esse, ma soltanto le relazioni grafiche (e le metrico-proiettive) vengono mantenute. Ed anzi le omografie sono, fra le corrispondenze biunivoche, le sole che sieno dotate della proprietà di conservare le relazioni grafiche, giacchè queste relazioni hanno come contenuto essenziale l'appartenersi di punti e piani o di punti e rette, e la condizione di non alterare tale appartenenza serve appunto a definire le omografie tra spazi o piani (§§ 85, 43).

A Mobius, abbiamo detto, si deve la considerazione generale delle omografie; conviene aggiungere che l'omografia tra due piani non differisce dal riferimento mediante proiezioni e sezioni, la cui nozione si riattacca a Poncelet, e deve anche esser notato che Mobius suppose per l'omografia la condizione di continuità, proprietà che può invece esser dedotta dalla definizione. dato il teorema fondamentale di Staudt.

Ma, non solo le omografie, bensì anche le *correlazioni* o *reciprocità* includenti il concetto del cambio di elemento (esteso poi immensamente dal Plücker), trovano

posto nell'opera di Mobius, nella quale, dunque, figurano per la prima volta, in tutta la loro estensione, le *proiettività*, come oggi si considerano nella Geometria proiettiva.

6 Accanto a Mobius deve esser posto tra i fondatori della Geometria proiettiva lo STEINER [1], di cui la « *Systematische Entwickelung...* » fu pubblicata nel 1832. Le proiettività assunsero, nelle sue mani, un nuovo ufficio, dando luogo alla *generazione* delle figure geometriche: così p. es. è dovuta allo Steiner la *generazione proiettiva delle coniche* (§ 61) che abbraccia entro di sè la *descrizione organica* di Newton, ecc.

Ed anche sotto questo aspetto l'ufficio delle proiettività può essere paragonato a quello dei movimenti.

Il cerchio. la sfera, il cilindro ed il cono di rotazione traggono origine, in differenti modi, dal movimento di un elemento generatore; in modo analogo molte curve, superficie, ecc. (le coniche, le quadriche, le cubiche gobbe, le superficie del 3.° ordine, ecc.) ammettono semplici generazioni mediante la proiettività tra forme fondamentali, e possono essere facilmente studiate per questa via.

7. Se ora gettiamo uno sguardo alla Geometria proiettiva, quale essa, per opera specialmente di Poncelet, Mobius e Steiner, si è formata, vediamo che, mentre i suoi principali risultati si sono venuti distinguendo da quelli della Geometria metrica, la dimostrazione di molte proposizioni grafiche viene ancor fatta ricorrendo al concetto della misura. Ora, mentre le nozioni grafiche si basano sopra un minor numero di concetti e di postulati, s'introducono così dei concetti e dei postulati non necessari che limitano inutilmente la generalità della scienza.

---

[1] Egli fu uno dei più fecondi ingegni geometrici di tutti i tempi. Con lui si apre un nuovo periodo nella storia della Geometria coll'inizio della *Geometria superiore*, che per opera di CHASLES, PLUCKER, CAYLEY, CREMONA, CLEBSCH, ecc. raggiunse presto uno sviluppo elevato.

E non si pone in rilievo l'intimo spirito, che pure la nuova scienza ha fatto nascere, per cui due figure proiettive vengono concepite come perfettamente analoghe a due figure uguali nell' antica Geometria. Studiate sotto questo aspetto, con istrumenti confacenti all'indole delle proprietà che s'indagano, tali figure dovranno presentare le stesse difficoltà di studio. Così p. es. il cerchio non apparirà più semplice di una conica qualsiasi, sicchè non converrà di ricondurre alla definizione di esso la definizione delle coniche, di cui le proprieta grafiche (o le proiettive) scaturiranno invece in modo più naturale e luminoso da una definizione generale *proiettiva*, come quelle dovute a Steiner (§ 61) o a Staudt (§ 56).

Lo scopo di rendere indipendente nei suoi metodi e nei suoi principii la Geometria proiettiva dalla metrica. caratterizza l'ultimo periodo della evoluzione della nuova scienza, nel quale, per opera di STAUDT [1], essa ha ricevuto il suo assetto definitivo.

Il problema fondamentale a cui si collega il raggiungimento del fine menzionato. si può far consistere nella determinazione della proiettività tra due rette. Se tale proiettività vien definita come un riferimento mediante proiezioni e sezioni, si riconosce subito che essa resta determinata da tre coppie di punti omologhi, basandosi sulla costanza del birapporto di 4 punti per le operazioni citate; ma s'introduce così, nella dimostrazione, un concetto metrico da cui si vuole invece prescindere.

Ora, la via da seguire si presenta spontanea allorchè si fissi l'attenzione sulla omografia fra due piani (o spazi).

---

(1) « *Geometrie der Lage* » (1847) — « *Beiträge zur Geometrie der Lage* » (1856-57-60).

Della vita e dell'opera di Staudt discorre il SEGRE in uno studio che precede la traduzione italiana della *Geometria di Posizione* (Torino, Bocca, 1889).

Due rette omologhe di questi piani risultano riferite fra loro in una corrispondenza biunivoca, di cui lo studio appare subito interessante, sia per penetrare più addentro nella considerazione dell'omografia, sia perchè tale corrispondenza si presenta a prima vista come una (apparente) generalizzazione della proiettività definita mediante proiezioni e sezioni. Infatti, si dimostra subito che la citata corrispondenza gode della proprietà di conservare i gruppi armonici (§ 44), cioè di lasciare invariato il valore del birapporto di 4 punti ogni qual volta esso sia — 1 ; sorge quindi la questione se il detto birapporto resti invariato sempre, anche quando ha un valore qualunque, diverso da — 1; in altre parole, sorge la questione se, data, tra due rette, una corrispondenza biunivoca che conservi i gruppi armonici, essa equivalga ad un riferimento delle due rette mediante proiezioni e sezioni.

Si è così condotti alla questione fondamentale, cui Staudt ha dato risposta affermativa, dimostrando quella proposizione che ha ricevuto appunto il nome di *teorema fondamentale della proiettività.*

Per tal modo, la nozione di gruppo armonico, che può esser posta graficamente mediante il quadrangolo (Desargues), e corrisponde d'altra parte ad una così semplice definizione metrica, è divenuta la base dell'edifizio innalzato dallo Staudt, essendo presa da lui come punto di partenza di una nuova definizione della proiettività tra due rette (o forme di 1.ª specie). La quale definizione, appunto perchè sorta dallo studio dell'omografia, presenta considerevoli vantaggi nella trattazione di questa, permettendo di eliminare la superflua condizione di continuità che Mobius vi aveva introdotto.

Con Staudt le relazioni grafiche, che costituiscono la parte sostanziale della Geometria proiettiva, vengono ordinate in un corpo di dottrina completamente distinto da quello delle proprietà metriche. Tale purezza di metodo

rende possibile l'esame critico dei postulati della nuova scienza (Klein, Darboux, Pasch, De Paolis ecc.), e ne fa riconoscere il grande carattere di generalità, per cui essa abbraccia entro di sè anche la Geometria (non euclidea) che prescinde dal postulato d' Euclide sulle parallele (Cayley, Klein).

Inoltre il *principio di dualità*, primitivamente dedotto da una trasformazione delle figure per reciprocità, appare ormai dimostrato *a priori* dal fatto che gli elementi fondamentali entrano simmetricamente nelle proposizioni grafiche elementari, che costituiscono i postulati della Geometria proiettiva (aggiunte, pel piano, le considerazioni che abbiamo istituite nel § 9).

8. Ma l'importanza attribuita alla separazione delle proprietà grafiche dalle metriche non deve far dimenticare il grande interesse di queste ultime, anzi la possibilità di subordinare sistematicamente la Geometria metrica alla proiettiva è da riguardarsi come uno dei più begli acquisti della nuova scienza.

Che la speciale considerazione degli elementi impropri permette di far scaturire relazioni metriche da relazioni proiettive (queste ultime riducibili a relazioni grafiche), appare già dai lavori di Poncelet, di Chasles ecc.; ma è grande merito di Laguerre [1] avere rilevato che *tutte* le proprietà metriche delle figure si possono riguardare come relazioni proiettive (o grafiche) di esse con quegli enti particolari che costituiscono l'*assoluto* (§§ 50, 54, 91), cioè coi *punti ciclici* (involuzione assoluta) nel piano, e col *cerchio all' infinito delle sfere* (polarità assoluta) nello spazio.

In seguito si vide che non solo l'ordinaria Geometria euclidea, ma anche la non euclidea poteva venire subor-

---

(1) « *Note sur la théorie des foyers* ». Nouvelles Annale de Mathématiques, 1853.

dinata in un modo analogo alla Geometria proiettiva (Cayley - 1859). E gli scambievoli rapporti della Geometria proiettiva colla metrica apparvero lumeggiati dal confronto dell'indirizzo proiettivo colle memorabili ricerche di RIEMANN, BELTRAMI, SCHLAFLY, mediante l'introduzione del concetto fondamentale di *gruppo di trasformazioni* (KLEIN e LIE).

9. Traendo le sue origini da problemi essenzialmente tecnici della Prospettiva, della Gnonomica, ecc., la Geometria proiettiva è venuta sorgendo dal campo della pratica al campo di una teoria sempre più elevata e feconda, che sta a fondamento dei successivi sviluppi della Geometria superiore. Essa ha seguito così la legge universale di evoluzione delle scienze, che consiste appunto in un processo di astrazione e di generalizzazione. Ma, come le altre scienze, anche la Geometria proiettiva, corrispondentemente al suo progresso teorico, ha veduto allargarsi il campo delle applicazioni, riuscendo alla sua volta non solo a dare una risposta ai problemi tecnici che in principio le dettero impulso, ma portando altresì nuovi ed inattesi resultati di grande valore pratico.

Abbiamo già accennato ai numerosi problemi che ricevono la loro soluzione dai metodi descrittivi di Monge e della sua scuola, ed in questi abbiamo riconosciuto i germi dell'opera di Poncelet. Alla sua volta all'estensione così ottenuta nell'uso delle proiezioni si deve collegare la *nuova Prospettiva* di COUSINERY (1828), e l'importanza che ha acquistato nella Geometria descrittiva il *metodo delle proiezioni centrali*, da cui FIEDLER ha fatto derivare tutti gli altri metodi di rappresentazione.

Ma un nuovo ordine di applicazioni si ha nel campo della *Statica grafica*. Queste sono dovute principalmente a CULMANN ([1]) (« *Lehrbuch der graphischen Statik* »,

---

([1]) In parte preceduto da MAXWEL (Phil. Magazine, 1864).

Zurigo, 1866) ed a Cremona (« *Le figure reciproche della Statica grafica* », 1872), i quali seppero ricondurre a semplici ed eleganti costruzioni, date dalla Geometria proiettiva, numerosi problemi tecnici relativi alla fabbricazione di volte, ponti, ecc.

Dalle quali applicazioni, paragonate allo svolgimento teorico della nostra scienza, sorge un grande ammaestramento confortato ad ogni passo dalla storia della Matematica. I vari rami della Matematica pura ed applicata si annodano e si collegano fra loro per vie inaspettate; e le idee. che traggono origine da elementari problemi della pratica, sembra debbano maturarsi per una lunga elaborazione di pensiero, nelle regioni più alte della teoria, prima che possano discendere feconde nel campo di attività della vita.

INDICE

CAPITOLO III

Gruppi armonici.

CAPITOLO IV

Il postulato della continuità e le sue applicazioni.

CAPITOLO V

Il teorema fondamentale della proiettività.

CAPITOLO VI

Proiettività tra forme di 1.ª specie.

CAPITOLO VII

Involuzione nelle forme di 1.ª specie.

CAPITOLO VIII

Proiettività tra forme di 2.ª specie.

CAPITOLO IX

Le coniche.

CAPITOLO X

Proiettività fra coniche.

CAPITOLO XI

Problemi determinati.

CAPITOLO XII

Proprietà focali delle coniche.

CAPITOLO XIII

Le proprietà metriche dei coni quadrici.

CAPITOLO XIV

Proiettività tra forme di 3.ª specie.

APPENDICE

ERRATA-CORRIGE

Pag	*linea*	*alle parole*	*si sostituisca*
12	11 dal basso	alle rette	alle rette e ai piani
47	1 » »	binivoca	biunivoca
74	8 » »	i segmenti	i rapporti dei segmenti
74	7 » »	dalle coppie	dalle designate coppie
74	6 » »	ai seni dei loro angoli	ai rapporti dei seni dei loro angoli (cfr § 34)
88	5 » »	$\pi_1\ \pi_2\ \pi_3$	$\pi_3\ \pi_2\ \pi_1$
150	14 » »	§ 36	§ 37
166	4 » »	punti omologhi	punti
166	4 » »	rette omologhe	rette
170	12 »	l' infinito	l' infinito, la quale si può considerare come un caso particolare dell' omotetia corrispondente al valore + 1 del relativo rapporto
178	16	§ 45	§ 47
178	14	§ 48	§ 47
179	6 dall' alto	*omotetia*	*omotetia (in particolare una traslazione)*
180	11 » »	equivale	si riduce
180	12 dal basso	§ 31	§ 49
192	9 dall' alto	*separati*	*separate*
192	11 dal basso	dai vertici	dai vertici, invece appartengono a due regioni diverse, se le proiezioni di essi su *due* lati separano i vertici, mentre le loro proiezioni sul terzo lato cadono ancora nello stesso segmento terminato dai vertici.
200	5 dall' alto	La legge di dualità	*La legge di dualità
208	5 dal basso	cono quadrico	cono quadrico (col vertice proprio)
212	12 dall' alto	proprietà 1	proprietà 4
213	12	§ 56	§ 57
223	8 dal basso	cerchio	cerchio passante per *A*, *B*,
230	1	conica	conica (rispettivamente luogo o inviluppo)
271	3 dall' alto	§ 31	§ 30
311	17 » »	polari di *P*)	polari p_π, p_τ di *P*).